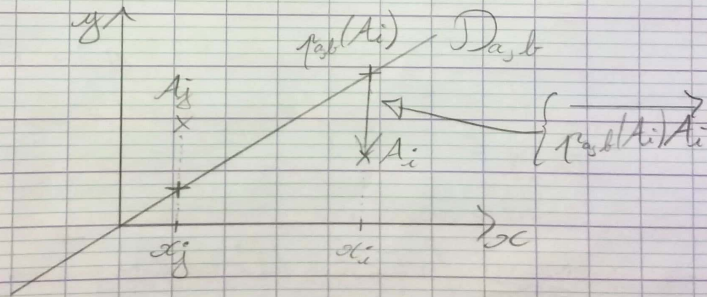


Donc :

$$f = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} f^{(k)} \right) \frac{c_k}{2\pi} + \frac{\int_0^{2\pi} f}{2\pi} + \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} f^{(k)} \right) \frac{c_k}{2\pi}$$

Exercice n°11 :

a) Schéma :



$$1) \text{ On a } \overrightarrow{f_{\text{ast}}(A_i)A_i} = \begin{pmatrix} x_i - x_i \\ y_i - ax_i - b \end{pmatrix}$$

Or $\|u\|^2 = (u|u)$, d'où :

$$f_{\text{av}}(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

2) a) Par l'absurde, soit (u,v,w) liée.
Alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tq :

$$\forall i \in [1, m], 1 = \lambda x_i + \mu y_i \quad (*)$$

1^{er} cas : $\exists (i,j) \in [1, m]^2, i \neq j$ et $x_i = x_j$.

Scdg, on se donne les $A_1, \dots, A_m$ tous distincts, quitte à se ramener à un problème de taille inférieure à m .

Alors :

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_i + \mu y_i = 1 \\ \lambda x_i + \mu y_j = 1 \end{cases} \Rightarrow \mu(y_i - y_j) = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 0$$

$y_i \neq y_j$
Si on $A_i = A_j$

$$\text{Donc } \forall k \in [1, m], \lambda x_k = 1$$

$$\Leftrightarrow x_k = 1/\lambda$$

car $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

Alors les points $A_1, \dots, A_m$ sont alignés sur la droite $D: x = 1/\lambda$. Contradiction.

2nd cas: $\forall (i, j) \in [1, m]^2, x_i = x_j \Rightarrow i = j$
 (ou $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$)

Alors: $(*) \Rightarrow \forall (i, j) \in [1, m]^2, i \neq j, \lambda x_i + \mu y_i = \lambda x_j + \mu y_j$
 $\Leftrightarrow \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} = -\frac{\lambda}{\mu}$

Donc $\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall k \in [1, m], A_k \in \mathcal{D}: y = -\frac{\lambda}{\mu}x + b$
 Contradiction.

Donc (u, v, w) libre.

b) On a $f_0(a, b) = \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)^2$
 $= \|w - av - bu\|^2$

c) $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien.

$av + bu \in \text{Vect}(v, u) = F$

Par thm de la projection orthogonale,
 $\exists! w_0 \in F, \|w - w_0\|$ soit minimal.

D'où $av + bu = w_0$. Soit $w_0 = \begin{pmatrix} w_1 \\ 1 \\ w_m \end{pmatrix}$.

Donc: $\begin{cases} ax_1 + b = w_1 \\ 1 \\ ax_m + b = w_m \end{cases}$

Où $\exists (i, j) \in [1, m]^2, x_i \neq x_j$.
 D'où deux équations
 indépendantes.

Ainsi, par Cramer, le couple (a, b) est
 fixé à une unique solution notée (a_0, b_0) .

⑥

Planche n°48 - suite -

Exercice n°11 - suite -

3) a) Par 2) d), (a_0, b_0) est bien la solution d'un système de deux éq. à deux inconnues.

En outre : $p_F(w) = w_0 = a_0 v + b_0 u$

On veut expliciter $p_F(w)$. Soit $F = \text{Vect}(u, v)$.
Soit $E_1 = \frac{u}{\|u\|}$.

Soit $E_2 = v + \lambda \frac{u}{\|u\|}$ et $(E_1 | E_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(u|v)}{\|u\|} + \lambda \frac{(u|u)}{\|u\|^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = - \frac{(u|v)}{\|u\|} \quad \text{Donc : } E_2 = v - \frac{(u|v)}{(u|u)} u$$

Donc $(E_1; E_2)$ est une base de F .

Ainsi : $p_F(w) = (E_1|w)E_1 + (E_2|w)E_2$

$$\Leftrightarrow p_F(w) = \frac{(u|w)}{\|u\|^2} u + (v|w)E_2 - \frac{(u|v)}{(u|u)} (u|w)E_2$$

$$= \frac{(u|w)}{(u|u)} u + (v|w)v - \frac{(v|w)(u|w)}{(u|u)} u$$

$$= \frac{(u|w)(u|w)}{(u|u)} v + \frac{(u|v)^2 (u|w)}{(u|u)^2} u$$

Rem. 1 - Il y a un petit piège. **Rem. 2** - Cet exercice est une baby-theory des séries de Fourier. Le principe est d'approximer une fonction par des fonction sinus et cosinus : en physique de décomposer un signal complexe (p.ex. un son) comme une somme de fonctions très simples dont les pulsations sont les multiples (ou harmoniques) d'une pulsation fondamentale.

$$\Rightarrow p_r(uv) = u \frac{(u|v)}{(u|u)} \left[1 + \frac{(u|v)^2}{(u|u)} - (v|v) \right] + v \left[(v|v) - \frac{(u|v)(u|v)}{(u|u)} \right]$$

On a $p_r(uv) = w = av + bu$.

Puisque (u, v) est libre, on obtient l'écriture de a et de b :

$$\begin{cases} a = (v|v) - \frac{(u|v)(u|v)}{(u|u)} \\ b = \frac{(u|v)}{(u|u)} \left[1 + \frac{(u|v)^2}{(u|u)} - (v|v) \right] \end{cases}$$

On a exprimé a et b avec des prod de u, v, v, u

b) def prod(u, v):

res = 0

for i in range(len(u)):

res = res + u[i] * v[i]

return res

min(x):
res = x[0]
for i in range(len(x)):
if res > x[i]:
res = x[i]
return res

Rem. 1 – Il y a un petit piège. **Rem. 2** – Cet exercice est une baby-theory des séries de Fourier. Le principe est d'approximer une fonction par des fonction sinus et cosinus : en physique de décomposer un signal complexe (p.ex. un son) comme une somme de fonctions très simples dont les pulsations sont les multiples (ou harmoniques) d'une pulsation fondamentale. Les coeff. devant les s_n et c_n donnent l'amplitude (et donc la contribution) relative de chaque harmonique.

Exercice 11 (Droite des moindres carrés, régression linéaire). **Introduction** : On se donne un nuage de n points $A_1, \dots, A_n$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On note $A_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et on suppose que ces points ne sont pas tous alignés.

indépendant {

```
def max(x):
    res = x[0]
    for i in range(len(x)):
        if res < x[i]:
            res = x[i]
    return res
```

```
def exo_11(x, y):
    U = [1] * len(x)
    a = (p8(x, y) - p8(U, x) * p8(U, y) / p8(U, U))
    b = (p8(U, y) / p8(U, U)) *
        (1 + (p8(U, x) ** 2) / p8(U, U) - p8(x, y))
```

```
import pylab as pl
```

```
Z = a * x + b * U
```

```
pl.figure("Droite des moindres carrés")
```

```
pl.plot(x, y)
```

```
pl.show()
```