Devoir 8 (3h30 effectives, à rendre avant 19h15)

On place 3 miroirs dans l'espace. Dans quels cas a-t-on un nombre fini d'images réfléchies ? Le problème qui suit permettra peut-être à quelques héros ou héroïnes qui poursuivraient leurs efforts sûrement au delà du D.S., de résoudre cette question... généralisée comme il se doit à un nombre fini quelconque de miroirs... et en dimension quelconque ....

En tous cas cette question est une bonne occasion de tenter de ... réfléchir ... géométriquement et d'ailleurs :

« Les miroirs feraient bien de réfléchir avant de renvoyer leurs images » Jean Cocteau.

Dans tout ce problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$. On notera $(u|v)$ le produit scalaire des deux vecteurs u et v de E et $\|u\|$ la norme issue de ce produit scalaire. $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est le groupe orthogonal de E, ses éléments sont les isométries de E. On appelle **réflexion** de E une symétrie orthogonale rapport à un **hyperplan de** E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Plus précisément on appellera ici **réflexion d'hyperplan** H la symétrie orthogonale par rapport à H. Elle est entièrement déterminée par H.

Si $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont des isométries, on notera $< f_1, f_2, \ldots, f_p >$ le plus petit sous-groupe du groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$ contenant $f_1, \ldots, f_p$. On dit que c'est le groupe engendré par $f_1, \ldots, f_p$.

Le but de ce problème est une étude des sous-groupes de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ qui sont **finis** et qui sont **engendrés par des réflexions.**

1) Généralités et le cas commutatif :

a) Soit s une réflexion d'hyperplan H.

   i) Justifier qu'il existe un base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de s est *diagonale*. On précisera cette matrice.

   ii) En déduire la valeur du déterminant de s.

b) Soit H un hyperplan de E et $f \in \mathcal{O}(E)$ telle que $f_{|H} = \mathrm{id}_H$. Montrer que f est ou bien la réflexion d'hyperplan H ou bien l'identité.

c) Soit s une réflexion d'hyperplan H. Montrer qu'une droite vectorielle D de E est stable par s si, et seulement si, $D \subset H$ ou $D = H^\perp$.

d) On note s la réflexion d'hyperplan $H = (\mathbb{R}u)^\perp$.
Donner, en la démontrant, une formule valable pour tout $x \in E$, donnant :

$$s(x) = x + \varphi(x)u,$$

où on exprimera $\varphi(x)$ à l'aide de produits scalaires.

e) Soit $g \in O(E)$ quelconque. Montrer que $g \circ s \circ g^{-1}$ est une réflexion en précisant son hyperplan.

f) On dit que deux hyperplans sont **perpendiculaires** si l'un contient l'orthogonal de l'autre. Ils sont donc distincts. Soient k hyperplans $H_1, \ldots, H_k$ deux à deux perpendiculaires et $u_1, \ldots, u_k$ des vecteurs non nuls tels que pour tout i, u_i est orthogonal à H_i.
Montrer que les vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ sont deux à deux orthogonaux. En déduire que $k \leq n$.

g) Démontrer que deux réflexions commutent si, et seulement si, elles sont identiques ou si l'hyperplan de l'une est perpendiculaire à l'hyperplan de l'autre.
Indication : En notant s_1 et s_2 deux réflexions d'hyperplans respectifs H_1 et H_2, remarquer qu'on a l'équivalence : $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 \Leftrightarrow s_1 = s_2 \circ s_1 \circ s_2^{-1}$. On pourra alors appliquer le résultat du e).

h) On suppose dans cette question que E est de dimension deux et que s_1 et s_2 sont deux réflexions de E distinctes qui commutent. Montrer que dans une b.o.n. $\mathcal{B}$ bien choisie, on a l'équivalence suivante :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ f \in < s_1, s_2 > \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \text{où } (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2.$$

On remarque que cette équivalence prouve que le groupe $(< s_1, s_2 >, \circ)$ est *isomorphe* au groupe à 4 éléments $(\{-1, 1\}^2, \cdot)$ (dans lequel le produit des couples se fait entrée par entrée).

i) Déduire de ce qui précède, toujours si E est de dimension deux, la forme de *tous* les sous-groupes finis **commutatifs** de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ engendrés par des réflexions, en raisonnant sur le nombre possible de réflexions qu'ils contiennent.

j) Dans le cas où E est de dimension trois, montrer de même qu'il y a, **à isomorphisme près**, seulement 4 sous-groupes commutatifs de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ engendrés par des réflexions.

2) Etude complète en dimension deux :

On suppose dans toute cette partie 2) que E est un espace vectoriel euclidien de dimension deux. On fixe sur E une orientation. Les hyperplans de E sont alors les droites vectorielles D de E : dans ce cas, on parlera de réflexion d'axe D.

Soit $G =< s_1, s_2 >$ le sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ engendré par deux réflexions d'axes respectifs D_1 et D_2. On choisit deux vecteurs unitaires $d_1 \in D_1$ et $d_2 \in D_2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base orthonormée directe de premier vecteur $e_1 = d_1$. On appelle θ le réel de $]0, 2\pi[$ tel que :

$$d_2 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2.$$

a) Déterminer les matrices S_1 et S_2 de s_1 et s_2 dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que $s_2 \circ s_1$ est une rotation ρ dont on précisera l'angle.

c) Soit R une rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer une CNS sur α pour que le sous-groupe $< R >= \{R^k, k \in \mathbb{Z}\}$ soit *fini*.

d) On suppose maintenant que $\theta = \dfrac{p\pi}{m}$ où $(p, m) \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge m = 1$. Démontrer que :

$$s_2 = \rho \circ s_1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, m-1]\!],\ s_1 \circ \rho^k \circ s_1 = \rho^{m-k}.$$

e) On note : $G' = \{\text{id}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{m-1}, s_1, \rho \circ s_1, \ldots, \rho^{m-1} \circ s_1\}$.

   i) Montrer que les ρ^k pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$ sont deux à deux distinctes.

   ii) En déduire que G' a exactement $2m$ éléments (distincts).

   iii) Montrer que G' est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$.

   iv) Montrer que $G = G'$.

f) Déduire de ce qui précède que G contient exactement m réflexions. Préciser les axes de ces réflexions lorsque $m = 6$ et $\theta = \pi/6$.

3) Deux résultats auxiliaires (indépendants de ce qui précède)

a) **Familles de vecteurs à angles obtus :**

Ici E est à nouveau un espace vectoriel euclidien de dimension quelconque.

Soit $(r_1, \ldots, r_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.

On dit que cette famille est *à angles obtus* ssi $\forall\,(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow (r_i | r_j) \leq 0$. Dans cette question, on considère une famille à angle obtus $(r_1, \ldots, r_p)$ de vecteurs de E qui sont en outre tous dans le même demi-espace ouvert, ce qui signifie qu'il existe un vecteur $t \in E \setminus \{0\}$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ (t | r_i) > 0$$

Le but de cette question est de montrer qu'alors la famille $(r_1, \dots, r_p)$ est *libre*. Pour cela on suppose, *par l'absurde* qu'il existe une relation de liaison, qui s'écrit quitte à réindicer les vecteurs :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i r_i = \sum_{i=k+1}^{p} \mu_i r_i,$$

avec des coefficients λ_i et μ_i tous **positifs** et non tous nuls. Soit v le vecteur défini par chaque membre de cette égalité.

i) Calculer $(v|v)$. En déduire que $v = 0$.

ii) Exprimer le produit scalaire $(v|t)$ et en déduire une *contradiction.*

b) **Lemme d'évitement des sous-espaces stricts d'un $\mathbb{R}$-e.v.**

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie n quelconque, $F_1, \dots, F_r$ des s.e.v. strict de E. Le but de cette question est de montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \notin \bigcup_{i=1}^{r} F_i$.

Pour cela, on raisonne *par l'absurde* en supposant que $E = \bigcup_{i=1}^{r} F_i$.

On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, note x_λ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

i) Montrer qu'alors il existe un sous-espace F_{i_0} qui contient n vecteurs $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}$ pour n valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinctes dans $\mathbb{R}$.

ii) Conclure à la *contradiction*

4) Les systèmes fondamentaux

Soit E un e.v. euclidien quelconque. Soit G un sous-groupe fini de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ engendré par des réflexions.

Définition : On note Δ l'ensemble des vecteurs unitaires u de E tels qu'il existe une réflexion de G d'hyperplan $H = (\mathbb{R}.u)^\perp$.

On remarque que si $u \in \Delta$ alors $-u \in \Delta$ et que Δ est fini, car G est fini.

a) Dans cette question seulement on suppose que E est de dimension deux et que G est le groupe de la question 2) f) pour $\theta = \pi/6$.

Expliciter l'ensemble Δ associé au groupe G.

Montrer que dans la base $\mathcal{B}$ du 2), les coordonnées complexes des vecteurs de Δ forment un sous-ensemble remarquable de $\mathbb{C}$.

b) On revient au cadre général où E est un espace euclidien quelconque et G un sous-groupe fini quelconque de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ engendré par des réflexions.

Démontrer que Δ est stable par l'action de G c'est-à-dire que :

$$\forall\, u \in \Delta,\ \forall\, g \in G,\ g(u) \in \Delta$$

c) Démontrer qu'il existe un vecteur t qui n'est orthogonal à aucun élément de Δ.

Pour la suite, on choisit un tel vecteur t et on pose :

$$\Delta^+ = \{r \in \Delta,\ (r|t) > 0\} \qquad \Delta^- = \{r \in \Delta,\ (r|t) < 0\}$$

Comme on a vu que Δ est stable par l'application $u \mapsto -u$, on sait que $u \in \Delta^- \Leftrightarrow -u \in \Delta^+$.

Définitions : Si $B = \{r_1, \dots, r_p\}$ est un ensemble de vecteurs de Δ^+, un vecteur x de E est dit **B-positif** s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tous positifs ou nuls, tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.

On dit aussi qu'un vecteur x est B-négatif ssi $-x$ est B-positif.

On appelle **système fondamental** de Δ un sous-ensemble $B = \{r_1, \dots, r_p\}$ de Δ^+ tel que tout élément de Δ^+ soit B-positif, et qui est de cardinal minimal parmi les ensembles vérifiant cette propriété. Dans ce qui suit, **on fixe un tel système fondamental** $B = \{r_1, \dots, r_p\}$. Les vecteurs de Δ^+ sont donc tous B-positifs, et ceux de Δ^- tous B-négatifs.

d) Soient i et j distincts dans $[\![1,p]\!]$. Montrer que si $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j > 0$ alors $x = \lambda_i r_i - \lambda_j r_j$ n'est ni B-positif, ni B-négatif.

e) i) Si on note s_i la réflexion d'hyperplan orthogonal à r_i, et si $i \neq j$ montrer que $s_i(r_j) \in \Delta^+$. On pourra utiliser la question précédente et la question 1) d).

ii) En déduire que le système fondamental $\{r_1,\ldots,r_p\}$ est formé de vecteurs faisant tous entre eux un angle obtus, autrement dit que $\forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!]$, $i \neq j \Rightarrow (r_i|r_j) \leq 0$.

iii) En déduire aussi en particulier que $(r_1,\ldots,r_p)$ est libre.

f) En déduire que si $r \in \Delta$ s'écrit $r = \sum_{i=1}^{p} \mu_i r_i$ où un des μ_i est strictement positif alors $r \in \Delta^+$.

g) Soient $(s_1,\ldots,s_p)$ les réflexions d'hyperplans orthogonaux respectivement à $(r_1,\ldots,r_p)$ et $G_0 =< s_1,\ldots,s_p >$. Le but de cette question est de démontrer que $G_0 = G$.

i) Démontrer que si $r \in \Delta^+$ et $r \neq r_i$ alors $s_i(r) \in \Delta^+$.
Dans tout ce qui suit on fixe un vecteur $r \in \Delta^+ \setminus B$ (c'est-à-dire un vecteur de Δ^+ qui n'est pas dans B).

ii) Démontrer qu'il existe un élément r_i de B tel que $(r|r_i) > 0$.

iii) On définit une suite (finie) par récurrence de la manière suivante : $u_0 = r$, et tant que $u_k \notin B$, on définit $u_{k+1} = s_{i_k}(u_k)$ où i_k est choisi tel que $(u_k|r_{i_k}) > 0$.
Montrer que tant qu'elle est définie, la suite des produits scalaires $(u_k|t)$ est strictement décroissante et donc que la suite (u_k) s'arrête, et que tous ses éléments sauf le dernier sont dans $\Delta^+ \setminus B$.

iv) En déduire qu'il existe un $g \in G_0$ tel que $g(r) \in B$.

v) En déduire, enfin, que $G = G_0$.

h) **Morale de cette longue histoire :** On vient de démontrer le

Théorème : *pour tout sous-groupe fini G de $(\mathcal{O}(E),\circ)$ engendré par des réflexions, il existe une famille $(r_1,\ldots,r_p)$ de vecteurs unitaires faisant entre eux des angles obtus, contenue dans un même demi-espace ouverts, et telle que $G =< s_1,\ldots,s_p >$ où s_i est la réflexion d'hyperplan $(\mathbb{R}.r_i)^\perp$.*

Bébé illustration : Décrire une telle famille (r_1,r_2) dans le cas de l'exemple plan du 2) f).

5) Where next ?

« So [said the doctor], now vee may perhaps to begin. Yes ? »
La dernière ligne de *Portnoy's Complaint* de Phillip Roth, prononcée par le psychiatre après trois cents pages de confession de Portnoy.

Le théorème de la fin du 4) s'applique bien sûr pour le problème de l'introduction et classifier tous les groupes finis engendrés par des réflexions déjà en dimension trois... mais il y a encore du travail « combinatoire » et géométrique pour y arriver.

On donne ici des **résultats** sans démonstration. Si G est un tel groupe dans $(\mathcal{O}(E),\circ)$ avec E de dimension trois, par le théorème, il peut être engendré par une, deux ou trois réflexions.

Le cas d'une réflexion est évident, le cas de deux se ramène au cas traité dans la partie deux, on s'occupe ici du cas où G est engendré par trois réflexions s_1, s_2, s_3 associé à un système fondamental (r_1,r_2,r_3) comme dans le théorème.

On note α,β,γ les nombres dans $[\pi/2,\pi[$ tels que :

$$\cos(\alpha) = (r_1|r_2) \quad \cos(\beta) = (r_2|r_3) \quad \cos(\gamma) = (r_3|r_1).$$

Propriété 1 : $\alpha+\beta+\gamma < 2\pi$.
Propriété 2 : il existe des *entiers* a,b,c au moins égaux à 2 tels que :

$$(r_1|r_2) = -\cos(\frac{\pi}{a}) \quad (r_2|r_3) = -\cos(\frac{\pi}{b}) \quad (r_3|r_1) = -\cos(\frac{\pi}{c}),$$

et :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > 1$$

Théorème : le triplet (a, b, c) ne peut prendre comme valeurs que $(2, 2, c)$ où $c \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$.

Théorème (récip) Pour chaque triplet du corollaire, il existe effectivement une configuration de trois plans qui convient. Là-dedans, on peut retrouver les groupes d'isométries des polyèdres réguliers...