

D.M. 19 : polynômes de Legendre

On note $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$. On définit un produit scalaire sur E par $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés d'une famille de polynômes de degrés étagés, et de tous les degrés, deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire.

Ils se trouvent que ces polynômes sont utiles dans bien des problèmes aussi bien pour obtenir des solutions « de base » pour certaines E.D. que pour obtenir par exemple des procédés d'intégration numérique grâce aux propriétés de leurs zéros.

On rappelle que $f^{(k)}$ (*attention à ne pas omettre les parenthèses dans l'exposant !*) désigne la fonction dérivée k -ième de la fonction f , avec la convention que $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)}$ est la fonction dérivée f' .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] = \frac{1}{2^n n!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$ avec les deux notations possibles $\frac{d^n}{dx^n}$ ou $^{(n)}$ pour dénoter la fonction dérivée n -ième (la seconde étant ici employée un peu abusivement sur une expression plutôt qu'une fonction).

La fonction P_n est appelée n -ième polynôme de Legendre, avec la convention $P_0(x) = 1$.

1) Orthogonalité et norme des polynômes de Legendre

a) On note $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Calculer alors $\varphi_n^{(2n)}(x)$.

b) Montrer que pour tout $k < n$ la dérivée k -ième $\varphi_n^{(k)}(x)$ peut s'écrire avec un facteur $(x^2 - 1)$.

c) A l'aide du b), montrer que si $n < m$ sont deux entiers distincts, alors :

$$\langle P_n | P_m \rangle = 0.$$

d) En déduire que $P_0, P_1, \dots, P_n$ forment une *base* de $\mathbb{R}_n[x]$.

e) Montrer que :

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

2) Une précision sur Gram-Schmidt

a) Expliquer que le procédé de Gram-Schmidt vu en cours permet de montrer le résultat plus précis suivant (unicité!) :

Théorème de Gram-Schmidt avec unicité : Si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base d'un sev F de E alors il existe une *unique* base orthonormée $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n$ de F telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\tilde{w}_i$ soit une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_i$ dans laquelle le coefficient de v_i est *strictement positif*.

b) En utilisant le 1), quel est le résultat de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliquée à la base canonique $e_0, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}_n[x]$ pour le produit scalaire défini ici sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$?

(On rappelle que $e_k(x) = x^k$).

Indication – Ne pas faire de calculs : utilisez le 1) et l'unicité du résultat !

3) Les P_n sont solutions d'une E.D.

En remarquant que $(x^2 - 1)\varphi'_n(x) = 2nx\varphi_n(x)$, montrer, en utilisant la formule de Leibniz, que les polynômes P_n sont solutions de l'Equation Différentielle (E_n) suivante :

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

N.B. Cette E.D. qui est la réécriture d'une E.D. venue de la physique, peut-être vue comme motivation de l'introduction des (P_n) .

4) Relation de récurrence entre les P_n

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n a la même parité que n .

b) En déduire que si $n \geq 2$ il existe un unique $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n(x) - \lambda_n x P_{n-1}(x)$ soit un polynôme de degré exactement $n - 2$.

c) En utilisant le 2) b), en déduire que $P_n - \lambda_n x P_{n-1}$ est un multiple de P_{n-2} .

On écrira donc $P_n = \lambda_n x P_{n-1} + \mu_n P_{n-2}$.

d) Montrer que $P_n(1) = 1$ et en déduire une première relation sur λ_n et μ_n .

Montrer alors que la relation précise obtenue est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (2 - \frac{1}{n})x P_{n-1}(x) - (1 - \frac{1}{n})P_{n-2}(x).$$

5) Etude des zéros des polynômes de Legendre

a) Démontrer à l'aide du théorème de Rolle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Legendre P_n admet exactement n zéros, qui sont tous dans $[-1, 1]$.

b) Retrouver le même résultat par le raisonnement géométrique suivant (qui s'adapte à d'autres familles de polynômes orthogonaux) :

Si *par l'absurde* P_n avait seulement $r < n$ zéros dans $[-1, 1]$, alors P_n change de signe $s \leq r$ fois dans $[-1, 1]$ et on note $x_1 < \dots < x_s$ les points de $[-1, 1]$ où P_n s'annule *changeant de signe*.

On considère alors le polynôme Q défini par $Q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_s)$.

(i) Justifier que $P_n Q$ a un signe constant, que peut-on en déduire pour $\int_{-1}^1 P_n(t) Q(t) dt$?

(ii) En remarquant que $\deg(Q) < n$, montrer d'autre part que $\int_{-1}^1 P_n(t) Q(t) dt = 0$, d'où la *contradiction*.

6) Application des polynômes de Legendre à une méthode d'intégration numérique

On note $x_1 < \dots < x_n$ les n zéros du polynôme de Legendre P_n (cf. 5) pour leur existence).

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe des constantes universelles $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telles que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$, on ait :

$$\int_{-1}^1 Q(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(x_i).$$

(Les λ_i sont indépendants de Q . Donc le calcul de l'intégrale de Q se ramène à l'évaluation de Q en n points fixés : les zéros du polynôme de Legendre P_n).

a) Soit $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ fixé et L le polynôme d'interpolation de Lagrange de Q aux points x_i .

On note $R = Q - L$. Justifier qu'on peut écrire R sous la forme $R = S P_n$ où S est un polynôme de degré au plus $n - 1$.

b) En déduire le résultat annoncé.

c) Montrer qu'en outre les λ_i sont tous positifs.