

DM 19 : solutions

Remarque : ce devoir était l'occasion de solides manipulations de polynômes. Toutefois on va voir que certaines gagnent à être « géométrisées ».

1) a) Si $x \mapsto P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ de degré n , on a $\forall x \in \mathbb{R}, P^{(n)}(x) = a_n(n!)$. (*Pas besoin de dém. sauf si vous ne savez faire aucune autre question !*)

Comme φ_n est une fonction polynomiale de degré $2n$, et de coefficient dominant 1 (formule du binôme), on en déduit que $\varphi_n^{(2n)}(x) = (2n)!$.

Attention – N'oubliez pas la parenthèse à $(2n)!$ car $2n!$ désigne 2 fois $n!$.

b) **(M1) Si on se souvient du cours sur la multiplicités des racines d'un polynôme**

On remarque que 1 et -1 sont des racines de multiplicité exactement n pour φ_n . Il s'ensuit (par caractérisation de la multiplicité avec les dérivées) que pour tout $k < n$, $\varphi_n^{(k)}(-1) = 0$ et $\varphi_n^{(k)}(1) = 0$. Donc 1 et -1 sont racines de $\varphi_n^{(k)}$, et ainsi $\varphi_n^{(k)}(x)$ se factorise par $(x-1)(x+1)$.

$$\forall k < n, \exists Q_k \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n^{(k)}(x) = (x^2 - 1)Q_k(x).$$

(M2) En redémontrant en fait dans ce cas particulier le lien entre les deux points de vue sur la multiplicité des racines

On a besoin, pour transmettre la récurrence, de faire un énoncé *plus précis* :

Pour chaque $k \leq n$, on note $H(k)$ la propriété : $\exists P_k \in \mathbb{R}[x], \forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n^{(k)}(x) \stackrel{(*)}{=} (x^2 - 1)^{n-k} P_k(x)$,

- Initialisation : $H(0)$ est vraie en posant $P_0(x) = 1$.

- Hypothèse de récurrence (H.R) : on suppose $H(k)$ vraie pour un $k < n - 1$, alors $k + 1 < n$, et en dérivant (*) on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n^{(k+1)}(x) = (x^2 - 1)^{n-k} P'_k(x) + 2x(n-k)(x^2 - 1)^{n-k-1} P_k(x) = (x^2 - 1)^{n-k-1} P_{k+1}(x).$$

En posant $P_{k+1}(x) = (x^2 - 1)P'_k(x) + 2x(n-k)P_k(x)$, on a bien $P_{k+1} \in \mathbb{R}[x]$ et $H(k+1)$ est vraie.

La récurrence est établie.

(M3) Une autre méthode possible est d'écrire $\varphi_n(x) = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ et d'utiliser la formule de Leibniz pour avoir une écriture explicite de $\varphi_n^{(k)}(x)$.

c) Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \neq m$. SRdG on suppose $n < m$.

Montrer que $\langle P_n | P_m \rangle = 0$ équivaut à montrer que si on note $I = \int_{-1}^1 \varphi_n^{(n)} \varphi_m^{(m)}$ on a $I = 0$.

Or, par intégration par partie (I.P.P) et pour $n < m$ (*on fait donc "baisser" n*)

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^1 \varphi_n^{(n)} \varphi_m^{(m)} &= [\varphi_n^{(n)} \varphi_m^{(m-1)}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \varphi_n^{(n+1)} \varphi_m^{(m-1)} \\ &= - \int_{-1}^1 \varphi_n^{(n+1)} \varphi_m^{(m-1)}, \quad \text{par b), appliqué à } \varphi_m^{(m-1)}. \end{aligned}$$

En refaisant $n - 1$ fois l'opération ("dériver φ_n , primitiver φ_m "), à chaque étape les crochets sont encore nul par le b) et on obtient :

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \int_{-1}^1 \varphi_n^{(2n)} \varphi_m^{(m-n)} \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 \varphi_m^{(m-n)} \quad \text{par a),} \\ &= (-1)^n (2n)! [\varphi_m^{(m-n-1)}]_{-1}^1, \quad \text{ce qui a du sens car } m - n - 1 \geq 0. \\ &= 0. \quad \text{par b)} \quad \square \end{aligned}$$

d) Les (P_i) étant deux à deux orthogonaux et non nuls, on sait d'après le cours que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

La famille $(P_i)_{i=0,1,\dots,n}$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs en dim. $n+1$, donc une base de l'e.v. des fonctions polynomiales de degré au plus n .

e) Le calcul du c) avec $n = m$ s'arrête à :

$$\langle P_n | P_n \rangle = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \varphi_n^{(0)} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$$

Par changement de variable (**savoir reconnaître Wallis sous cette forme!**) $x = \sin(\theta)$, $\theta = \arcsin(x)$ on obtient :

$$\|P_n\|^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(\theta))^{2n+1} d\theta.$$

En posant $W_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(\theta))^{2n+1} d\theta$, on montre (**archi-classique : il faut vraiment savoir le faire!**) la rel. de réc. pour les W_n et $W_1 = 2$ et en en déduit l'expression explicite $W_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{((2n+1)!)}$ et donc $\|P_n\|$ (*faire le calcul clairement, mais ne pas négliger le résultat donné ici!*).

Remarque – On peut aussi faire le calcul directement à partir de la forme $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$ en séparant $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, en primitivant un facteur et dérivant l'autre.

2) a) On sait déjà que le procédé de Gram-Schmidt garantit l'existence d'une telle base : en notant $(w_1, \dots, w_n)$ l'orthogonalisée de $(v_1, \dots, v_n)$ le coefficient de v_i dans l'écriture de w_i est 1 et ensuite, on passe à $\widetilde{w}_i = w_i / \|w_i\|$ ce qui ne change pas la positivité de ce coefficient.

Montrons l'unicité. On raisonne par récurrence, avec comme hypothèse de récurrence qu'il existe une unique famille orthonormale $(\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_k)$ de F vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

Initialisation : $\widetilde{w}_1$ doit s'écrire sous la forme $\widetilde{w}_1 = \lambda v_1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, donc en passant à la norme, $|\lambda| = \frac{1}{\|v_1\|}$, et $\lambda > 0$ donc $\lambda = \frac{1}{\|v_1\|}$, et $\widetilde{w}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$.

Hérédité : On suppose la propriété vraie à un rang $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a donc notre famille $(\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_k)$ orthonormale, unique, vérifiant les conditions de l'énoncé.

On cherche (nécessairement!) $\widetilde{w}_{k+1}$ sous la forme $\widetilde{w}_{k+1} = \lambda v_{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \widetilde{w}_i$ avec $\lambda \neq 0$, pour assurer l'égalité $\text{Vect}(\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_{k+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1})$ sachant qu'on a déjà $\text{Vect}(\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$

Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on doit avoir $(\widetilde{w}_{k+1} | \widetilde{w}_i) = 0$ c'est-à-dire $\lambda(v_{k+1} | \widetilde{w}_i) + \lambda_i = 0$, donc :

$$\lambda_i \stackrel{(*)}{=} -\lambda(v_{k+1} | \widetilde{w}_i).$$

Mais alors

$$\widetilde{w}_{k+1} = \lambda(v_{k+1} - \sum_{i=1}^k (v_{k+1} | \widetilde{w}_i) \widetilde{w}_i) \quad (**)$$

En prenant les normes dans (**), on voit que $1 = |\lambda| \cdot G$ où $G = \|(v_{k+1} - \sum_{i=1}^k (v_{k+1} | \widetilde{w}_i) \widetilde{w}_i)\|$.

Ceci détermine $|\lambda|$ de façon unique, et avec la condition $\lambda > 0$, détermine λ .

Avec (*), on en déduit que les λ_i sont aussi déterminés de façon unique, ce qui achève de démontrer l'unicité de $\widetilde{w}_{k+1}$.

La récurrence est établie, et l'unicité avec.

b) Les polynômes de Legendre normalisés $\widetilde{P}_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$ forment une b.o.n. de $\mathbb{R}_n[x]$, de degré étagés et le coeff. de x^n dans $\widetilde{P}_n$ étant strictement positif, on sait par l'unicité dans le a), que le résultat de l'orthonormalisation de Schmidt appliqué à la base canonique est exactement la famille des $\widetilde{P}_i$.

3) En dérivant $n+1$ fois l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 1)\varphi'_n(x) = 2nx\varphi_n(x)$, on obtient par Leibniz, peu de termes en fait car $(x^2 - 1)^{(k)} = 0$ si $k > 2$ à gauche et à droite $x^{(k)} = 0$ pour $k > 1$:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(n+2)}(x)(x^2 - 1) + (n+1)\varphi_n^{(n+1)}(x) \cdot 2x + \frac{n(n+1)}{2}\varphi_n^{(n)}(x) \cdot 2 &= 2n\varphi_n^{(n+1)}(x)x + 2n(n+1)\varphi_n^{(n)}(x) \\ \Leftrightarrow \varphi_n^{(n+2)}(x)(x^2 - 1) + \varphi_n^{(n+1)}(x)(2x(n+1) - 2xn) + \varphi_n^{(n)}(x)[(n+1)n - 2n(n+1)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

Donc P_n est bien solution de l'E.D. demandée.

4) a) Comme le polynôme $x^2 - 1$ est pair et que la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est impaire (resp. paire), la parité de φ_n est la même que celle de l'entier n .

Remarque – On rappelle qu'une fonction polynomiale est paire (resp. impaire) ssi tous les monômes qui la constitue sont de degré pair (resp. impair) : utile au b) ci-dessous.

b) Les polynômes $P_n(x)$ et $xP_{n-1}(x)$ étant de degré n , il existe un unique λ_n tel que les termes de degré n s'annulent dans $P_n(x) - \lambda_n xP_{n-1}(x)$.

D'autre part P_n n'a pas de terme de degré $n-1$ (par le a), aucun terme de degré $n-2p-1$, et de même $xP_{n-1}(x)$ donc $P_n(x) - xP_{n-1}(x)$ est de degré au plus $n-2$.

Le c) ci-dessous va montrer que le degré est exactement $n-2$.

c) *Comme au 2) b) : l'unicité évite les calculs !*

Le polynôme $x \mapsto Q(x) = P_n(x) - \lambda_n xP_{n-1}(x) \in \mathbb{R}_{n-2}[x]$ est orthogonal à tous les P_i pour $i \leq n-3$.

En effet, pour $i \leq n-3$, on a : $\langle P_n | P_i \rangle = 0$ par 1) c), et $\langle xP_{n-1} | P_i \rangle = \langle P_{n-1} | xP_i \rangle$ (cf. la déf. du p.s. ici, ce n'est pas la bilinéarité, car x n'est pas un scalaire, mais simplement par associativité du produit dans l'intégrale) et $x \mapsto xP_i(x)$ étant de degré $\leq n-2$ on a $\langle P_{n-1} | xP_i \rangle = 0$.

Donc Q appartient à la droite vectorielle de $\mathbb{R}_{n-2}[x]$ orthogonale à l'hyperplan $\mathbb{R}_{n-3}[x]$, et donc est proportionnel à P_{n-2} . (Cela prouve aussi l'affirmation : degré exactement $n-2$ demandée au b)).

$$\begin{aligned} d) P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^n (x+1)^n] = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(x-1)^n]^{(n-k)} [(x+1)^n]^{(k)}, \quad \text{par Leibniz,} \\ &= \frac{1}{2^n n!} (n!(x+1)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} n(n-1) \dots (k+1)(x-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1))(x+1)^{n-k}), \\ P_n(1) &= \frac{1}{2^n n!} (n!2^n + \sum_{k=1}^n 0), \\ P_n(1) &= 1. \end{aligned}$$

Dans la relation $P_n(x) \stackrel{(1)}{=} \lambda_n xP_{n-1}(x) + \mu_n P_{n-2}(x)$ on en déduit $1 \stackrel{(2)}{=} \lambda_n + \mu_n$.

D'autre part, comme (1) est une égalité de polynôme, et que seuls P_n et xP_{n-1} sont de degré n , l'égalité des coefficients de x^n donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n n!} (2n)(2n-1) \dots (n+1) &= \lambda_n \frac{1}{2^{n-1} (n-1)!} (2n-2)(2n-3) \dots n, \\ \Leftrightarrow \lambda_n &= \frac{(2n)(2n-1)}{(2n)n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

Et par la relation (2), on conclut $\mu_n = 1 - \lambda_n = -(1 - \frac{1}{n})$ □.

5) a) Pour $\varphi_n(x) = (x^2 - 1)^n$, on a $\varphi_n(1) = \varphi_n(-1) = 0$.

Donc par Rolle, φ'_n admet un zéro c_1 dans l'ouvert $] -1, 1[$.

Mais on a vu aussi, au 1) b), que $\varphi_n^{(k)}$ s'annule encore en 1 et -1 pour tout $k < n$.

Donc en part. φ''_n admet trois zéros $-1 < c_1 < 1$.

Par Rolle, on en déduit que φ''_n admet deux zéros, l'un dans $] -1, c_1[$ et l'autre dans $] c_1, 1[$.

Comme (si $n > 2$), φ''_n s'annule encore en -1 et 1, on en déduit qu'on a 4 zéros pour φ''_n .

Par récurrence directe, (Rolle and Rolle) on montre que $\varphi_n^{(n)}$ admet n zéros dans $] -1, 1[$.

b) (i) En chaque x_i la fonction P_n et la fonction Q changent de signe, donc le produit garde un signe constant de part et d'autre de x_i .

Aux autres points que x_i , ni P_n , ni Q ne changent de signes.

On en déduit donc que $P_n Q$ a un signe constant et comme ce n'est pas la fonction nulle,

$\int_{-1}^1 P_n Q$ n'est pas nulle.

(ii) Mais P_n est orthogonal à tous les P_i pour $i \leq n-1$, qui forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, donc on a $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Comme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a donc $(P_n|Q) = 0$, donc $\int_{-1}^1 P_n Q$ qui est nulle.

D'où la contradiction, entre le (i) et le (ii).

6) a) Le polynôme $R = Q - L$ s'annule au point x_1 donc s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R(x) = (x - x_1)R_1(x)$ où R_1 est un polynôme. A son tour, R_1 s'annule au point x_2 , donc $R(x) = (x - x_1)(x - x_2)R_2(x)$.

Par réc. immédiate $R(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)R_n(x)$ où R_n est un polynôme.

Mais $P_n(x) = \lambda(x - x_1) \dots (x - x_n)$ (polynôme scindé).

Donc en posant $S(x) = \frac{R_n(x)}{\lambda}$, on a bien $R = SP_n$.

Comme le degré de R est au plus $2n-1$, celui de S est au plus $n-1$.

b) On considère $\int_{-1}^1 Q = \int_{-1}^1 L + \int_{-1}^1 R$.

Par a) $\int_{-1}^1 R = \int_{-1}^1 S(x)P_n(x)dx$. Mais comme P_n est orthogonal à tous les P_i pour $i \leq n-1$, qui forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $S \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ donc $(S|P_n) = 0$, donc $\int_{-1}^1 SP_n = 0$.

Donc $\int_{-1}^1 Q = \int_{-1}^1 L$.

Or le polynôme d'interpolation de Lagrange L s'écrit $L(x) = \sum_{i=1}^n Q(x_i)L_i(x)$ où $(L_1, \dots, L_n)$ sont les polynômes de base de Lagrange (indép. de Q , définis à partir des x_i).

On rappelle que $L_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$.

Donc $\int_{-1}^1 Q = \sum_{i=1}^n Q(x_i) \int_{-1}^1 L_i(x)dx$, ce qui donne la conclusion en posant $\lambda_i = \int_{-1}^1 L_i(x)dx$.

c) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On considère le polynôme $Q = L_i^2$.

La formule précédente donne que $\int_{-1}^1 Q = \sum_{k=1}^n \lambda_k L_i^2(x_k) = \lambda_i$ puisque $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$.

Donc $\lambda_i = \int_{-1}^1 L_i^2(t)dt > 0$. □