

DM 18 : solution des parties 1 et 2

Partie I :

a) Etude des puissance d'une matrice triangulaire supérieure dite de Jordan

(M1) On calcule à la main,

$$J(a, b)^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$J(a, b)^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix}.$$

Cela suffit pour avoir envie de considérer le prédicat $H(n) : J(a, b)^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que $H(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• La propriété $H(1)$ est vraie par déf. de $J(a, b)$.

• Supposons $H(n)$ vraie pour un $n \geq 1$. Alors $J(a, b)^{n+1} = J(a, b) \cdot \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$

Et par définition du produit de matrices, on obtient bien que : $J(a, b)^n = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}.$

La prop. $H(n+1)$ est vraie et la récurrence est établie : $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(M2) si on a compris le produit par blocs, on peut remarquer que la matrice $J(a, b)$ est diagonale par bloc : $J(a, b) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = (b)$.

Le produit de matrices diagonales par bloc se fait en faisant le produit des blocs diagonaux : autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J(a, b)^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$

Trivialement $B^n = (b^n)$.

Du coup, on est ramené seulement à comprendre les puissances de $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Et là, on prouve par récurrence ou par la formule du binôme que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On va voir à la question suivante que c'est malin de ne faire que des opérations sur les lignes ici.

Par définition $M_\lambda = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 5 & -3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Or $\text{rg}(M_\lambda) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ -1-\lambda & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ par $L_1 \leftrightarrow L_2$.

Puis $\text{rg}(M_\lambda) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda-\lambda^2 & -3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ par $L_2 \leftarrow L_2 + (1+\lambda)L_1$.

Puis $\text{rg}(M_\lambda) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 5-\lambda-\lambda^2 & -3 \end{pmatrix}$ par $L_3 \leftrightarrow L_2$.

Puis $\text{rg}(M_\lambda) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -3 + 5\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}$ par $L_3 \leftarrow L_3 - (5 - \lambda - \lambda^2)L_2$.

Cette dernière matrice, étant échelonnée, est non inversible si, et seulement si, $P(\lambda) = 3 - 5\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 = 0$.

Or ce polynôme P admet 1 comme racine évidente. En factorisant par 1, on obtient $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)$.

Finalement $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 3)$.

Donc $\text{rg}(M_\lambda) < 3$ si, et seulement si, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -3$.

N.B. Bien sûr, pour calculer le rang, on aurait pu aussi opérer sur les colonnes. Le seul avantage ici est que les matrices M_λ et $N_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -3 + 5\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 \end{pmatrix}$ sont L -équivalentes i.e. $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $M_\lambda = PN_\lambda$ et donc $\ker(M_\lambda) = \ker(N_\lambda)$ ce qui est commode pour la question suivante.

- c) i) On peut bien sûr calculer ceci de manière indépendante du calcul précédent. Ce qu'on sait en tous cas est que les noyaux sont non triviaux (pas réduits à $\{0\}$).

Mais avec le calcul de la question précédente, on a pour $\lambda = 1$, $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cette matrice est visiblement de rang 2 : au moins 2 car les deux premières colonnes sont indépendantes, et pas 3 par le résultat précédent ou parce que la dernière ligne est nulle. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans $\ker(N_1)$. Or dans N_1 , $C_2 = -(C_1 + C_3)$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(N_1) = \ker(M_1)$.

Donc $u = (1, 1, 1) \in \ker(\Phi - \text{id})$ et comme par théorème du rang, $\dim(\ker(\Phi - \text{id})) = 1$, on conclut que (u) est une base de $E_1 = \ker(\Phi - \text{id})$.

- ii) De même pour $N_{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il est évident pour les mêmes raisons qu'au (i) que

$\text{rg}(N_{-3}) = 2$. Un vecteur du noyau de N_{-3} est moins évident à l'oeil nu. Si on cherche

(x, y, z) tel que $N_{-3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ on trouve les équations $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ En prenant y comme

paramètre ce système équivaut à $\begin{cases} x = -3y, \\ z = -1/3y \end{cases}$.

Ainsi E_2 est la droite de vecteur directeur $(-3, 1, -1/3)$ et comme on veut une base dont la dernière coordonnée vaut 1, on prend $v = (9, -3, 1)$ qui définit (v) base de $E_2 = \ker(\Phi + 3 \text{id})$.

- d) *Par l'absurde* s'il existait une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, alors pour chaque $i = 1, 2, 3$, $\text{rg}(\Phi - \lambda_i \text{id}) < 3$ puisque $\Phi - \lambda_i \text{id}$ serait représentée dans $\mathcal{B}$ par une matrice ayant au moins une colonne nulle.

Donc les λ_i seraient égaux à 1 ou -3 par le b).

Mais, en notant $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, on aurait au moins deux vecteurs disons SRdG $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, indép. qui seraient tous les deux soit dans E_1 soit dans E_2 .

Or par le c), on a vu que E_1 et E_2 sont deux droites vectorielles *contradiction*.

On a donc montré qu'il n'existe pas de base $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ soit diagonale.

Terminologie : on dit que Φ n'est pas *diagonalisable*. On va voir ci-après qu'on peut néanmoins la *trigonaliser* i.e. trouver une base dans laquelle la matrice de Φ est trigonale supérieure, et même, trigonale supérieure sympathique i.e. de la forme de Jordan donnée au a).

- e) i) Soit $v = \Phi - \text{id}$. Il est général, pour tout endomorphisme v , que $\ker(v) \subset \ker(v^2)$. En effet, si $v(x) = 0$ alors $v(v(x)) = v(0) = 0$. Donc $E_1 \subset F_1$.

Pour trouver la dimension de F_1 , on calcule $(M - I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque que dans cette matrice $C_3 = C_1$ et $C_2 = -2C_1$

Ainsi cette matrice $(M - I)^2$ est de rang 1.

On en déduit que $\dim(\ker((\Phi - \text{id})^2)) = 2$ par théorème du rang.

- ii) La relation $C_3 = C_1$ vue sur les colonnes de $(M - I)^2$ dit aussi que $w = (-1, 0, 1)$ est dans $\ker((\Phi - \text{id})^2)$.

Or on a vu que $\ker(\Phi - \text{id})$ est la droite $\mathbb{R}u$ où $u = (1, 1, 1)$. Donc $w = (-1, 0, 1) \notin \mathbb{R}u = \ker((\Phi - \text{id}))$.

- iii) On considère $\mathcal{C} = (f(w), w)$. Comme $w \in \ker(f^2) \setminus \ker(f)$, on a $f(w) \neq 0$ et $f(w) \in \ker(f)$. Donc w et $f(w)$ sont indépendants et $\mathcal{C} = (f(w), w)$ est bien une base de F_1 qui est de dim. 2. Dans cette base $\mathcal{C}$, par construction, on a bien $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : Ce qu'il faut comprendre au delà de ce cas particulier : l'endomorphisme $f = (\Phi - \text{id})|_{F_1}$ est nilpotent d'indice 2. La base $(f(w), w)$ est une base du plan F_1 dans laquelle cet endomorphisme s'écrit d'une des manières les plus agréables.

- iv) Par définition $f = \Phi|_{F_1} - \text{id}_{F_1}$, donc $\Phi|_{F_1} = f + \text{id}_{F_1}$ donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\Phi|_{F_1}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- f) On remarque d'abord que $F_1 \cap E_2 = \{0\}$. En effet si $x \in F_1 \cap E_2$, on a d'un côté $f(x) = -3x$ et d'autre part $(f - \text{id})^2(x) = 0$ i.e $f^2(x) - 2f(x) + x = 0$.

Avec la première équation cela donne, $9x + 6x + x = 0$ ce qui donne $x = 0$.

Ainsi, F_1 et E_2 sont en somme directe donc si on considère la famille $\tilde{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, v) = (f(w), w, v)$ où v vecteur de base de E_2 , on sait que $\tilde{\mathcal{C}}$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$.

Par construction, dans cette base, $\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\Phi) = J(1, -3)$.

- g) Par la formule de changement de base, en notant $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $M = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}} J(1, -3) P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_0}$. La matrice $P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $f(w), w, v$ dans la base canonique.

On a seulement besoin de calculer $f(w)$. Or pour $w = (-1, 0, 1)$, on calcule $f(w) = (\Phi - \text{id})(w)$

par le produit $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (il est normal de trouver un vecteur colinéaire

à $u = (1, 1, 1)$ vecteur directeur de $\ker(\Phi - \text{id})$.)

Donc $M = PJ(1, -3)P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 9 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- h) Alors $M^n = PJ(1, 3)^n P^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Deuxième partie : application à des suites récurrentes linéaires

```
a) def u(n):
    if n==0 or n==1:
        return 0
    elif n==2:
        return 1
    else :
        u0,u1,u2=0,0,1
        for i in range(n):
            u0,u1,u2=u1,u2,-u2+5*u1-3*u0
        return u0
```

- b) i) On prend $A = M$ la matrice de la première partie.
 ii) Par récurrence immédiate, on a $U_n = M^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 c) Par le relation du h) de la première partie, on a $M = PJ(1, -3)P^{-1}$ donc $M^n = PJ(1, 3)^n P^{-1}$.
 Et d'après le a) de la première partie, on conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = P \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} . P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec ici $a = 1$, $b = -3$. On peut bien sûr en déduire une formule explicite pour u_n .

$$\text{Pour cela, on commence par calculer } P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & -10 & -3 \\ -4 & -8 & 12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et donc } P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } U_n = \frac{1}{16} P \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 7 + 4n + 9.(-3)^n \\ 3 + 4n - 3.(-3)^n \\ -1 + 4n + (-3)^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{16} (-1 + 4n + (-3)^n).$$