**Exercice 1.** Montrer que si $A$ et $B$ sont deux matrices réelles symétriques alors $[\mathrm{Tr}(AB+BA)]^2 \le 4\,\mathrm{Tr}(A^2)\,\mathrm{Tr}(B^2)$.

**Exercice 2.** a) On munit $M_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Définir ce produit scalaire.

b) On considère $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. (i) Montrer que $\mathcal{F}$ est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

(iii) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

(iv) Calculer la distance de $J$ à $\mathcal{F}$.

**Exercice 3.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $u = (u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$.

a) Justifier que l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} f(u_n)g(u_n)$ est bien définie.

b) Déterminer la C.N.S sur $u$ pour que $\varphi$ soit un produit scalaire sur $E$.

**Exercice 4.** Soit $E$. un espace euclidien, et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal ssi $\forall\, u \in E,\ \|p(u)\| \le \|u\|$

**Exercice 5** (Généralise le précédent)**.** Soit $E$ euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *norme d'opérateur de* $f$ et note $|||f|||$, le plus petit de rapport de Lipschitz de $f$

a) Justifier que $|||f||| = \sup\{\|f(x)\|,\ x \in E,\ \|x\| \le 1\}$.

b) Soit $D_1$ et $D_2$ deux droites vectorielles d'un plan euclidien, faisant entre elles un angle, non orienté $\theta \in ]0,\pi/2]$.

Soit $p$ le projecteur sur $D_1$ de direction $D_2$. Déterminer $|||p|||$.

c) Soient $E$ euclidien de dim. qcq, et $F_1$ et $F_2$ deux s.e.v. non triviaux de $E$ supplémentaires dans $E$. On définit l'angle entre $F_1$ et $F_2$ comme $\theta(F_1,F_2) = \inf\{\mathrm{Arccos}(x|y),\ x \in F_1 \cap S,\ y \in F_2 \cap S\}$.

Vérifier que $\theta(F_1,F_2) \in [0,\pi/2]$ et que $\theta(F_1,F_2) = \pi/2$ si, et seulement si, $F_1 \perp F_2$.

d) Généraliser alors la prop. du b) pour le calcul de la norme triple de $p$ projecteur sur $F_1$ parallèlement à $F_2$.

(On retrouve la caract. des proj. orthogonaux par $|||p||| \le 1$).