

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. finie où $\mathbb{K}$ est un corps contenant $\mathbb{Q}$.

a) Montrer que si $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont des projecteurs de E tels que $p_1 + \dots + p_r = 0$ alors tous les p_i sont nuls.

b) Montrer que si p, q, r sont trois projecteurs de E tels que $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3}$ est un projecteur, alors $q = r = 0$.

Indication Penser à la trace.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB - BA = A$. Calculer $\text{Tr}(A^{1000})$.

Exercice 3 (Réduction des matrices de trace nulles ...). a) Soient $\mathbb{K}$ un corps contenant $\mathbb{Q}$ et E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. finie.

i) Définir la trace d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

ii) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle, si on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})$, on ait $a_{1,1} = 0$.

iii) En déduire que si $\text{Tr}(f) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ ait toutes ses entrées diagonales nulles.

b) Soit $D \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont distincts.

Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), A \mapsto AD - DA$.

i) Déterminer le noyau de f .

ii) Déterminer l'image de f .

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{Tr}(A) = 0 \Leftrightarrow \exists (M, N) \in M_n(\mathbb{K})^2, A = MN - NM$.

d) On se propose ici de montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice T.S.S.

i) **Méthode 1** Prouver cette propriété par récurrence : on utilisera l'écriture des matrices par bloc.

ii) **Méthode 2** A l'aide de la suite des noyaux Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice d et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A .

(1) Montrer que :

$$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker u^{d-1} \subsetneq \ker u^d = E.$$

(2) En déduire qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(V_k) \subset V_{k-1}$ où l'on note pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $V_0 = \{0\}$. (La famille (V_k) est le associé à la base $\mathcal{B}$

(3) Conclure! (Remarque : ce résultat deviendra facile avec les outils de 2ème année).

e) Le s.e.v. engendré par les matrices nilpotentes :

i) Justifier que toute matrice nilpotente est de trace nulle.

ii) Soit $\mathcal{T} = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(A) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est le plus petit s.e.v. de $M_n(\mathbb{K})$ contenant l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes.