

Exercice 1. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

- a) Trouver $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $PNP^{-1} = J$.
- b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = aI_n + N$. Expliciter A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps ayant au moins trois éléments.

- a) Soit M une matrice qui commute à toutes les matrices $PM P^{-1}$ pour P inversible. Justifier que toutes les matrices semblables à M commutent entre elles.
- b) Soit M une matrice qui n'est pas une matrice d'homothétie. Justifier que M est semblable à une matrice A dont la première colonne est E_2 .
- c) Soit A une matrice comme au b). Soit $T = I + \lambda E_{1,2}$ et $B = TAT^{-1}$. Montrer que B et A ne commutent pas. Conclure.

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ a) Montrer que $\text{rg}(A) = 1 \Rightarrow A^2 = \text{Tr}(A)A$.

- b) Montrer que $A^2 = \text{Tr}(A).A$ et $\text{Tr}(A) \neq 0$ entraîne $\text{rg}(A) = 1$.