

Exercice 1. Calculer, sous forme factorisée $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(a) & \cos(b) \\ 1 & \cos(a) & 1 & \cos(c) \\ 1 & \cos(b) & \cos(c) & 1 \end{vmatrix}$.

La forme factorisée trouvée doit donner une C.N.S. simple d'annulation du déterminant.

Exercice 2. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que si on change de signes toutes les entrées $a_{i,j}$ pour lesquelles $i + j$ est impair, le déterminant de A n'est pas changé.

Exercice 3. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & (x_2 + \dots + x_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & (x_1 + \dots + x_{n-1})^{n-1} \end{vmatrix}$

Solution 1 Pour D_1 :

(M1) avec la colonne de 1 irresistible : Pour D_1 avec $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $D_1 = \begin{vmatrix} \cos(b) - \cos(a) & \cos(2b) - \cos(2a) \\ \cos(c) - \cos(a) & \cos(2c) - \cos(2a) \end{vmatrix}$.

Mais $\cos(2b) - \cos(2a) = (2\cos^2(b) - 1) - (2\cos^2(a) - 1) = 2(\cos^2(b) - \cos^2(a)) = 2(\cos(b) - \cos(a))(\cos(b) + \cos(a))$.

On conclut que $D_1 = 2(\cos(b) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(b))$.

(M2) en commençant par transformer les $\cos(2x)$ en $2\cos^2(x) - 1$: on éliminera le -1 par ajout de C_1 .

On obtient $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & 2\cos^2(a) - 1 \\ 1 & \cos(b) & 2\cos^2(b) - 1 \\ 1 & \cos(c) & 2\cos^2(c) - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & 2\cos^2(a) \\ 1 & \cos(b) & 2\cos^2(b) \\ 1 & \cos(c) & 2\cos^2(c) \end{vmatrix}$ via $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$.

Puis $D_1 = 2 \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \cos(c) & \cos^2(c) \end{vmatrix}$. Maintenant enfin $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2, 3$, donne ensuite :

$$D_1 = 2 \begin{vmatrix} \cos(b) - \cos(a) & \cos^2(b) - \cos^2(a) \\ \cos(c) - \cos(a) & \cos^2(c) - \cos^2(a) \end{vmatrix}.$$

Par factorisation dans la première ligne, puis dans la seconde :

$$D_1 = 2(\cos(b) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(a)) \begin{vmatrix} 1 & \cos(b) + \cos(a) \\ 1 & \cos(c) + \cos(a) \end{vmatrix} = 2(\cos(b) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(b)).$$

Pour D_2 : de même $L_i \leftarrow L_i - L_1$ nous ramène à un déterminant 3×3 ,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & \cos(a) - 1 & \cos(b) - 1 \\ \cos(a) - 1 & 0 & \cos(c) - 1 \\ \cos(b) - 1 & \cos(c) - 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Avec Sarrus (efficace ici pour une fois, grâce à la diagonale de zéro) ou bien en développant par rapport à la première colonne : on a immédiatement : $D_2 = 2(\cos(a) - 1)(\cos(b) - 1)(\cos(c) - 1)$.

Si on préfère avec la formule $\cos(x) - 1 = -2\sin^2(x/2)$

$$D_2 = -16\sin^2(a/2)\sin^2(b/2)\sin^2(c/2).$$

Solution 2 Avec la formule $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$.

Si on note $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})$ la matrice transformée comme dans l'énoncé,

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sigma(1)+1+\sigma(2)+2+\dots+\sigma(n)+n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Or pour toute permutation σ , $\sigma(1) + \dots + \sigma(n) = 1 + 2 + \dots + n$, donc $(-1)^{\sigma(1)+1+\sigma(2)+2+\dots+\sigma(n)+n} = 1$ et $\det(B) = \det(A)$.

Solution 3 $(x_2 + \dots + x_n)^{n-1} = (s - x_1)^{n-1}$ où $s = x_1 + \dots + x_n$.

Or $(s - x_1)^{n-1} = (-x_1)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k x_1^k$ avec les $a_k = (-1)^k \binom{n}{k} s^{n-1-k}$, l'essentiel étant que ces a_k ne dépendent que de s .

En numérotant les colonnes $C_0, \dots, C_{n-1}$ Donc en remplaçant C_{n-1} par $C_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k C_k$, on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & (-1)^{n-1} x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & (-1)^{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} Vdm(x_1, \dots, x_n). \quad \square$$