Exercice 1. Identifier les endo.de matrice en b.o.n. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = -A$.

Exercice 2.

En exercice de cours, on a montré que si $(P_0, \dots, P_{n-1})$ *famille de polynôme unitaires avec* $\deg(P_i) = i$ *alors* $\det(P_i(a_j)) = V(a_1, \dots, a_n)$*. On se propose de généraliser ce résultat :*

Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de degré tous au plus $n-1$. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$.

Montrer que $\det(P_i(a_j)) = \det_{\mathcal{B}}(P_1, \dots, P_n) V(a_1, \dots, a_n)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $K_{n-1}[X]$.

Exercice 3 (Hyperplan médiateur)**.** Montrer que si x et y sont deux vecteurs distincts et de même norme d'un espace euclidien E, il existe un unique hyperplan H de E tel que $y = s_H(x)$ où s_H désigne la symétrie orthogonale par rapport à H.

Exercice 4. Soit K un corps infini et E un K-e.v. de dim. finie n.

On veut montrer que si $E = \bigcup_{i=1}^{N} F_i$ avec F_i des s.e.v. de E alors il existe un i tel que $F_i = E$.

Pour cela, on fixe une base $\mathcal{B}$ de E, et pour chaque $\lambda \in K$, on considère le vecteur $x_\lambda \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.