

Exercice 1. Montrer que pour toute forme linéaire $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi = \text{Tr}(A \cdot \square)$, c'est-à-dire, pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \text{Tr}(A \cdot M)$. Montrer en outre que cette matrice est unique.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$. Calculer $\text{Tr}(\varphi)$.

Exercice 3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée avec entrées réelles. On suppose que M peut s'écrire $M = P \Delta P^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{C})$.

(On dit que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$).

- Justifier que $\text{Tr}(\Delta) \in \mathbb{R}$.
- On suppose désormais i.e. dans toute la suite de l'exercice, qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = I_n$ (la matrice unité). Que peut-on dire de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$?
- Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} à l'aide de P , P^{-1} et des λ_i .
- Montrer que $\text{Tr}(M^{-1}) = \text{Tr}(M)$.
Indication – C'est un exercice sur les nombres complexes....
- Montrer que $|\text{Tr}(M)| \leq n$.
- Montrer que si $\text{Tr}(M) = n$ alors $M = I_n$.

Exercice 4. On appelle matrices de Hessenberg les matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont toutes les entrées strictement en dessous de la première sous-diagonale sont nulles autrement dit telles que $A(i, j) = 0$ pour $i - j \geq 2$.

Un algorithme pour montrer que toute matrice est semblable à une matrice de Hessenberg :

Cas assez rare où on montre « semblable » à l'aide d'opérations élémentaires.
On part d'une matrice M et on va faire des opérations élémentaires *simultanées* sur les lignes et colonnes pour rester dans la même classe de similitude.

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque et $M \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

- Soit $a \in \mathbb{K}$.
 - Déterminer la C.N.S. sur a, i, j pour que la matrice $I_n + aE_{i,j}$ soit inversible et calculer son inverse.
 - On suppose $i \neq j$ et on note $\widetilde{M} = M \cdot (I_n - aE_{i,j})$. Exprimer les coefficients $\widetilde{m}_{k,l}$ de $\widetilde{M}$ en fonction de ceux de M .
 - On garde les notations précédentes. Soit $M' = (I_n + aE_{i,j}) \cdot \widetilde{M}$. Exprimer les coefficients $m'_{k,l}$ de M' en fonction de ceux de $\widetilde{M}$.
 - Déduire de ce qui précède l'écriture des coefficients de M' en fonction de ceux de M sous la forme suivante à compléter :

$$m'_{k,l} = \begin{cases} \text{si } k \neq i \text{ et } l \neq j, \\ \text{si } k = i \text{ et } l \neq j \\ \text{si } k \neq i \text{ et } l = j \\ \text{si } k = i \text{ et } l = j. \end{cases}$$
- Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. On veut montrer que M est semblable à une matrice M' dont tous les coefficients de la première colonne sont nuls à part possiblement $m'_{1,1}$ et $m'_{2,1}$. Pour cela : on suppose déjà qu'on n'est pas dans la situation où tous les $m_{i,1}$ pour $i \geq 3$ sont nuls sinon il n'y a rien à faire.
 - Montrer qu'avec cette hypothèse où il existe un $i \geq 3$ tel que $m_{i,1} \neq 0$ alors M est semblable à une matrice R telle que $r_{2,1} \neq 0$.
 - On suppose désormais (SRdG vue la question précédente) que $m_{2,1} \neq 0$.
A l'aide d'opérations sur les lignes de type $L_i \leftarrow L_i - \frac{m_{i,1}}{m_{2,1}} L_2$ et d'opération sur les colonnes qui restent « inoffensives », montrer que M est semblable à une matrice M'

telle que $m'_{i,1} = 0$ pour tout $i \geq 3$. Montrer qu'en outre la matrice de passage P telle que

$$M' = PMP^{-1} \text{ est de la forme } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

- c) On appelle sous-diagonale d'une matrice la diagonale en dessous de la diagonale principale. Déduire de la question précédente, par récurrence que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice M' dont toutes les entrées situ  es strictement en-dessous de la sous-diagonale sont nulles autrement dit telles que $M'(i, j) = 0$ pour tout (i, j) tels que $i - j \geq 2$.