

Exercice 1. Vérifier que $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^t B)$ définit le produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$ i.e. celui pour lequel la base canonique est orthonormée.

Exercice 2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des nombres réels deux à deux distincts.

On pose pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$.

a) Vérifier qu'on a bien défini un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

b) On va montrer qu'il existe $(L_0, \dots, L_n) \in E^{n+1}$ famille de polynômes telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$$

(i) Justifier que $(L_0, \dots, L_n)$ existe bien et qu'elle est unique.

(ii) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une b.o.n. de E pour ce p.s.

(iii) Quand a-t-on déjà rencontré cette famille $(L_0, \dots, L_n)$?

Exercice 3. Soit $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^{++})\}$. Déterminer le $\min_{f \in \mathcal{F}} (\int_0^1 f)(\int_0^1 \frac{1}{f})$.

Exercice 4. Soit F et G deux s.e.v. supplémentaires d'un espace euclidien. Les s.e.v. $F^\perp$ et $G^\perp$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5. a) On munit $M_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Définir ce produit scalaire.

b) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au s.e.v. F formé des matrices T.S.