

Exercice 1 (DS 7 (2016/2017)). Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\text{id}_E$.

- a) Montrer que si $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\text{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel, stable par u .
- b) Montrer par récurrence finie que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2k \leq n$, la propriété $H(k)$ suivante est vraie :

$$H(k) : \exists (x_1, \dots, x_k) \in E^k, (x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k)) \text{ est libre}$$

Indication – On pourra remarquer qu'à chaque étape $\text{Vect}(x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k))$ est stable par u .

- c) Montrer alors que la dimension de E est forcément paire.

d) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$

Exercice 2 (Endomorphisme dont le carré vaut $-\text{id}$: structure presque complexe DS 7 2016/2017). Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie m . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + \text{id}_E = 0$.

- a) Premières propriétés de u :
 - i) Montrer que u n'admet pas de valeur propre.
 - ii) Montrer que m est pair.
 - iii) Montrer que si $x \in E$ est un vecteur non nul, alors $F = \text{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel, qui est stable par u .

- b) Un lemme matriciel : on se donne n et p dans $\mathbb{N}^*$. On considère $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $C \in M_p(\mathbb{K})$ ainsi que $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose alors $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On suppose que $M^2 = -I_{n+p}$.

- i) Traduire la relation $M^2 = -I_{n+p}$ sous la forme de trois égalités concernant les matrices A, B, C .
- ii) Chercher alors une matrice $X \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $AX - XC = B$.

Indication : X s'écrit en fonction de A et B .

- iii) En déduire que la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice diagonale par bloc

$$M' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

- c) Déduire de ce qui précède que si on note $m = 2q$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(J, \dots, J)$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- d) Une deuxième méthode (plus conceptuelle) pour arriver au même résultat qu'au c) : on définit une loi de composition externe de $\mathbb{C} \times E$ dans E en posant pour tout $((a+ib), x) \in \mathbb{C} \times E$, $(a+ib).x = ax + bu(x)$.

- i) Justifier qu'avec sa loi + usuelle et cette l.c.e. E est un $\mathbb{C}$ -e.v. On notera $E_{\mathbb{C}}$ pour E muni de cette structure.
- ii) Soit $\mathcal{B}$ une base du $\mathbb{R}$ -e.v. E . Justifier que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $E_{\mathbb{C}}$.
- iii) D'après la question précédente, on sait donc que $E_{\mathbb{C}}$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ une base de $E_{\mathbb{C}}$. Montrer que $(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), \varepsilon_2, u(\varepsilon_2), \dots, \varepsilon_q, u(\varepsilon_q))$ est une base $\mathcal{B}$ de E et que dans cette base $\mathcal{B}$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est exactement de la forme donnée au c).

Exercice 3 (Réduction simultanée de deux endo. DS 6, 2011/2012, inclus dans DS 7, 2016/2017). Soit E un $\mathbb{C}$ -e.v. de dim. finie $n \geq 1$. Soient u et v deux endomorphismes de E . On suppose que $u^2 = v^2 = -\text{id}_E$ et que $u \circ v + v \circ u = 0$.

1) Montrer que pour un endomorphisme comme u , en notant $E_i(u) = \{x \in E, u(x) = ix\}$ et $E_{-i}(u) = \{x \in E, u(x) = -ix\}$, on avait $E_i(u) \oplus E_{-i}(u) = E$. (On a la même propriété pour v bien sûr).

(Les s.e.v. $E_i(u)$ et $E_{-i}(u)$ ont été nommés, en passant, en D.M., sous-espaces propres pour la valeur propre i , resp. $-i$).

2)

a) Soit $x \in E_i(u)$. Que dire de $v(x)$?

b) En déduire que $\dim E_i(u) = \dim E_{-i}(u)$.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle qu'on ait les écritures par bloc suivantes :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} iI_m & 0 \\ 0 & -iI_m \end{pmatrix} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$