Exercice 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\det(A+E_{1,1})\det(A-E_{1,1}) \leq \det(A)^2$.

b) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer $\det(A+B)\det(A-B) \leq \det(A)^2$.

Exercice 2. Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A+X) = \det(A)+\det(X)$.

Exercice 3 (Transformations pseudo-orthogonales et transformations de Lorentz)**.** *On développe ici une théorie analogue à celle de $O(\mathbb{R}^2)$ pour les endomorphismes qui, au lieu de conserver le p.s. $(u_1|u_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ conservent la forme de Lorentz φ définie ci-dessous*

On se donne un réel *non nul* c fixé (en relativité : la vitesse de la lumière).

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, on définit : $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$, par, si $u_1 = (x_1, t_1) \in E,\ u_2 = (x_2, t_2) \in E$:

$$\varphi(u_1, u_2) = x_1x_2 - c^2\, t_1t_2.$$

1) Justifier que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

2) Est-ce un produit scalaire ?

3) On définit $\psi : E \to \mathbb{R}$, par $\psi(u) = \varphi(u,u)$ appelée *forme quadratique* associée à φ.

On appelle "famille-type" de E pour φ, tout couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E^2$, vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \psi(\varepsilon_1) = 1, \quad \psi(\varepsilon_2) = -c^2, \\ \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer qu'une telle famille-type est toujours *une base* de E. On parlera désormais de *base-type.*

b) Donner une base de E très simple qui est une base type pour φ.

4) Montrer que pour un endomorphisme f de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \varphi(f(u), f(v)) = \varphi(u,v)$,

(ii) $\forall\, u \in E, \psi(f(u)) = \psi(u)$,

(iii) f transforme une base-type de E pour φ en une autre base-type.

On dira qu'un endormorphisme f vérifiant ces propriétés est "pseudo-orthogonal".

5) Montrer que l'ensemble des endomorphismes pseudo-orthogonaux est un groupe pour la composition.

6) Montrer que la matrice dans $\mathcal{B}$ d'un endomorphisme pseudo-orthogonal est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & c^2\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & -c^2\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1.$$

D'après le 5), l'ensemble formé par ces matrices est un sous-groupe de $M_2(\mathbb{R})$ noté $O(1,1)$, appelé groupe des matrices pseudo-orthogonales.

7) On note $O^+(1,1) = \{M \in O(1,1),\ \det(M) = 1\}$. Etudier la commutativité des groupes $(O(1,1), \times)$ et $(O^+(1,1), \times)$.

8) Préliminaire : de même que la théorie des matrices orthogonales de déterminant +1 rejoint celle des angles via les fonctions cos et sin, de même ici apparaissent les fonctions ch, et sh.

Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{L} = \{A \in O(1,1)^+(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} \alpha & c^2\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \text{ et } \alpha > 0\}$$

est égal à l'ensemble des matrices :

$$H_\theta = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\theta) & c\,\mathrm{sh}(\theta) \\ \frac{\mathrm{sh}(\theta)}{c} & \mathrm{ch}(\theta) \end{pmatrix}, \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

En déduire que $(\mathcal{L}, \times)$ est un groupe commutatif, isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.