

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

On cherche à montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \left\{ \int_0^1 |x^2 - ax - b|^2 dx, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathbb{R}$ admet un minimum et à calculer ce minimum.

a) Définir un produit scalaire adapté sur E pour interpréter géométriquement la question posée. (On justifiera les propriétés du produit scalaire).

b) Montrer alors que ce minimum est atteint pour un unique couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera. Calculer aussi la valeur $\min(\mathcal{A})$ obtenue.

Exercice 2. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1. Soit $P : ax + by + cz = 0$ plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P , c'est dire de la symétrie d'axe P parallèlement à $P^\perp$.

Exercice 3. Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace vectoriel préhilbertien et $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$ trois vecteurs unitaires.

Pour tous les $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$, on note $v_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i u_i$.

Montrer qu'il existe un triplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$ tel que : $\|v_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\| \geq \sqrt{3}$.

Exercice 4. a) Soit $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]), f(0) = 0, f(1) = 1\}$. Soit $J(f) = \int_0^1 f'(t)^2 dt$. Montrer que le minimum des $J(f)$ pour $f \in \mathcal{A}$ est atteint en une seule fonction, à préciser.

Indication – Interprétation physique : minimiser l'intégrale de l'énergie cinétique, c'est se fatiguer le moins possible.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f(1) = 0, f'(0) = \alpha\}$.

i) Montrer que pour $f \in \mathcal{B}$ on a $\int_0^1 (1-t)f''(t)dt = -\alpha$.

ii) En déduire $\min\{\int_0^1 f''^2, f \in \mathcal{B}\}$ en précisant pour quelles $f \in \mathcal{B}$ il est atteint.