Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur E tel que pour tout u dans E on ait $\varphi(u,u) = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Montrer que la base $\mathcal{B}$ est orthonormée pour φ.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\Phi : f \mapsto \left[\int_0^1 f'(t)^2 dt + f(0)f(1) \right]^{1/2}$.

Montrer que Φ est une norme euclidienne sur E c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire φ de E tel que pour tout $f \in E$, $\Phi(f) = \varphi(f,f)$.

Exercice 3. Soit E muni d'un p.s. et $\| \ \|$ la norme euclidienne associée. Soit $x_1, \dots, x_n$ dans E. Montrer que $\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$. Cas d'égalité ?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien dont le p.s. est noté $(\ | \ )$. Soit F un s.e.v. de E et $(e_1, \dots, e_d)$ une b.o.n. de ce s.e.v. F.

Pour deux vecteurs $(u,v) \in E^2$ tous deux non nuls, on définit l'angle géométrique $\widehat{(u,v)}$ par $\widehat{(u,v)} = \text{Arccos}(\frac{(u|v)}{\|u\| \, \|v\|})$.

On considère un vecteur *unitaire* $v \in E$ et on note $\widetilde{v}$ son projeté orthogonal sur F.

On note α l'angle $\widehat{(v, \widetilde{v})}$ et pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\alpha_i = \widehat{(v, e_i)}$.

Montrer que $\cos^2(\alpha) = \sum_{i=1}^{d} \cos^2(\alpha_i)$.