

MARDI 18h-19h

Exercice 1. a) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$ et $F = \text{Vect}\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\}$ qu'on suppose de dim. finie. On note $n = \dim(F)$. On a vu qu'alors $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de F , qui est un s.e.v. de E stable par u

Justifier que la matrice de $u|_F$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

b) Si $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \dots - a_1X - a_0$ est un polynôme unitaire quelconque, on appelle *matrice compagnon du polynôme P* et on notera $A = C(P)$ la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer alors que pour tout λ , $\det(\lambda I_n - A) = P(\lambda)$.

Autrement dit : le *polynôme caractéristique* de $C(P)$ est le polynôme P .

Exercice 2 (Utilisation d'un Vandermonde pour un résultat de divisibilité). Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$.

A l'aide du déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \binom{a_1}{1} & \binom{a_1}{2} & \dots & \binom{a_1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{a_n}{1} & \binom{a_n}{2} & \dots & \binom{a_n}{n-1} \end{vmatrix}$, montrer que $\prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k)$ est divisible par $\prod_{1 \leq k < l \leq n} (l - k)$.

Exercice 3. Soit $x_0, \dots, x_n$ dans $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

On considère l'application $\Phi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, $P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$.

- On note $\mathcal{B}_0 = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Expliciter la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_0}(\Phi)$.
- On note $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ la base de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$ associée à $(x_0, \dots, x_n)$, c'est-à-dire que par définition $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Expliciter la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{L}}(\Phi)$.
- En déduire une expression de l'inverse de la matrice de Vandermonde à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange L_i .

Exercice 4 (Déterminant de Vandermonde où il manque une colonne et application à l'inverse de la matrice de VDM). **Petit complément sur le lien coefficients/racines pour les polynômes de degré n :**

Si $P(X) = (X - x_1) \dots (X - x_n)$ alors $P(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^k \sigma_k X^{n-k} + \dots + (-1)^n \sigma_n$ où $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ s'appelle la k -ième fonction symétrique élémentaire de $(x_1, \dots, x_n)$.

Maintenant l'exercice :

a) Soit $V = (x_i^{j-1})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ une matrice de Vandermonde. Soit V_k la matrice obtenue en supprimant la $k+1$ ème colonne de V (formée des puissances k -ièmes) et en ajoutant une dernière colonne formée des puissances n -ièmes.

Montrer que $\det(V_k) = \sigma_{n-k}(x_1, \dots, x_n) \det(V)$, où σ_{n-k} est la $(n-k)$ -ième fonction symétrique élémentaire.

b) En déduire une expression de l'inverse de V (si $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distinctes).