

Autour de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 1. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients tous positifs. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

$$P(\sqrt{xy}) \leq \sqrt{P(x) \cdot P(y)}.$$

Exercice 3. a) Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Donner la valeur minimum possible pour $\sum_{i=1}^n a_i^2$ et préciser quand elle est atteinte.

b) Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et soit $\mathcal{A} = \{f \in E, \int_0^1 f(t) dt = 1\}$. Déterminer le minimum de l'application $f \mapsto I(f) = \int_0^1 f(t)^2 dt$, quand f varie dans \mathcal{A} .

Exercice 4. Trouver les $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $\int_0^1 f(t)^2 dt = 1$ et $\int_0^1 t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sup_{[0,1]} |f| \leq \sqrt{\int_0^1 f'^2}$.

Exemples de p.s et de normes

Exercice 6 (Incontournable). Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'e.v. des fonctions polynomiales à coeff. réel. Soit $a < b$ dans \mathbb{R} On définit pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt$.

Démontrer que φ définit un p.s. sur E .

Exercice 7. a) Montrer que la norme euclidienne canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est *multiplicative* en ce sens que : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $M_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 2$, qui vérifie $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| = \|A\| \|B\|$.

Exercice 8 (Espace ℓ^2 des suites de carrés sommables). On dit qu'une suite $x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est "de carré sommable" si la série définie par $\sum x_k^2$ est convergente.

On note E l'ensemble des suites réelles de carré sommable.

a) Montrer que si $(x, y) \in E^2$ alors la suite (\widetilde{P}_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\widetilde{P}_n = \sum_{k=0}^n |x_k y_k|$ est convergente. (On notera sa limite $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k y_k|$.)

b) Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

c) On considère l'application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k$.

(i) Justifier que φ est bien définie.

(ii) Montrer que φ ainsi définie est un produit scalaire sur E .

d) On considère F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang, c'est-à-dire défini par : $(u_n) \in F \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = 0$.

(i) Montrer que F est un s.e.v. de E .

(ii) Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

N.B. Déf (sera donnée en cours) $F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, (x|y) = 0\}$.