Matrices semblables

Exercice 1. Si A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifient $B = PAP^{-1}$ alors comparer $\ker(A)$ et $\ker(B)$ et $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(B)$.

Exercice 2. a) Si A et B sont deux matrices semblables, la matrice P telle que $A = PBP^{-1}$ est-elle unique ?

b) Si deux matrices A et B sont semblables et si on a deux matrices P et Q telles que $B = PAQ$ a-t-on forcément $P = Q^{-1}$?

Exercice 3. a) Les matrices suivantes sont-elles équivalentes ? $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Les matrices du a) sont-elles semblables ?

c) Mêmes questions pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

d) Mêmes questions pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (Classes de similitude des matrices de rang 1)**.** a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} A \text{ est semblable à } E_{2,1} \\ \text{ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\} \text{ tel que } A \text{ est semblable à } \lambda E_{1,1}. \end{cases}$.

b) Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si, et seulement si, elles ont même trace.

Exercice 5 (Classes de similitudes des matrices nilpotentes d'indice 2)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et $N_2 = \{A \in M_n(\mathbb{K})\, A^2 = 0\}$.

a) Donner une majoration du rang de A pour $A \in N_2$.

b) Soit $A \in N_2$, de rang r. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que deux matrices de N_2 sont semblables si, et seulement si, elles ont même rang.

Exercice 6. Soit Φ une forme linéaire de $M_n(\mathbb{K})$, vérifiant $\forall\, (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $\Phi(AB) = \Phi(BA)$.

Montrer que Φ est proportionnelle à la trace.

Indication – Considérer les images $\Phi(E_{i,j})$ des matrices de la base canonique, et les $E_{i,j}E_{k,l}$.

Exercice 7. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie.

a) Prop. importante : Montrer que si p est un projecteur, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

b) Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des projecteurs de E tels que pour tout $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$ avec $i \neq j$ on ait $p_i \circ p_j = 0$. Montrer que $p = p_1 + \cdots + p_r$ est un projecteur.

c) On suppose maintenant que $r = n = \dim E$ i.e. $p = p_1 + \cdots + p_n$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \neq 0$.

   i) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{rg}(p_i) = 1$ et identifier l'endomorphisme p.

   ii) Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 + \cdots + \mathrm{Im}\, p_n$.

   iii) Montrer que la somme précédente est directe.

Exercice 8 (Invariants complets de similitude des matrices 2×2)**.** *On a dit en cours que deux matrices semblables ont même trace, mais que la trace seule ne suffit pas à caractériser la similitude de deux matrices :* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ *n'implique pas que* A *et* B *semblables : donner un exemple (même avec* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$*) ! Dans le cas des matrices* 2×2 *toutefois il est aisé de donner deux invariants caractérisant la "similitude".*

a) Vérifier que si $(A, B) \in M_2(\mathbb{K})^2$ alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. (On comprendra plus tard ce résultat d'une manière plus conceptuelle !)

b) En déduire que si A et B dans $M_2(\mathbb{K})$ sont *semblables* alors elles ont même déterminant.

c) Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$ non scalaire. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{K}^2$ tel que (X, AX) libre.

d) Montrer que deux matrices A et B qui ne sont pas scalaires sont semblables, si et seulement si, elles ont même trace et même déterminant.

N.B. Voir DM 14 2018/2019 pour une application de ce résultat à la théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre deux.