Exercice 1 (Forme du produit avec une matrice diagonale)**.**

a) Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ une matrice diagonale.

Expliciter les produits AD et DA et retenir ce résultat.

b)

On suppose que $d_1, \dots, d_n$ sont deux à deux distincts et on note encore $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_D = \{A \in M_n(\mathbb{K}),\ AD = DA\}$ (commutant de la matrice D).

'c) Si $n = 3$ et $D = \mathrm{diag}(d, d, d')$ avec $d' \neq d$, déterminer $\mathcal{C}_D$

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Donner un exemple de matrice nilpotente dont aucune des entrées n'est nulle.

Exercice 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 5 (Propagation des rangées de zéros)**.** On note, pour tout $k \in [\![-(n-1), (n-1)]\!]$, Δ_k l'ensemble des matrices ayant toutes leur entrées nulles sauf éventuellement celles sur la diagonale numéro k i.e. sauf éventuellement les entrées (i, j) tel que $j - i = k$.

Par exemple Δ_0 est l'ensemble des matrices diagonales et Δ_1 les matrices ayant toutes les entrées nulles sauf sur la première diagonale supérieure.

On convient que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $|k| \geq n$, $\Delta_k = \{0\}$.

a) Montrer que le produit de matrice définit une application de $\Delta_k \times \Delta_l$ dans Δ_{k+l}.

b) En remarquant que $TSS_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k \geq 1} \Delta_k$, montrer si $A \in TSS_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p \in \bigoplus_{k \geq p} \Delta_k$. Que dire si $p \geq n$?

Exercice 6 (Nilpotence...)**.** *Dans tout ce qui suit,, on ne considère que des matrices carrées d'ordre n, i.e. dans $M_n(\mathbb{K})$*

a) Montrer que si une matrice triangulaire supérieure est nilpotente, alors elle est triangulaire supérieure stricte.

b) Montrer qu'inversement une matrice T.S.S. est toujours nilpotente.

b) La somme de deux matrices carrées nilpotentes est-elle une matrice nilpotente ?

c) Montrer que si deux matrices A et B sont nilpotentes dans $M_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$, alors $A + B$ est nilpotente.

Indication – Montrer que si $A^{r+1} = 0$ et $B^{s+1} = 0$ alors $(A + B)^{r+s+1} = 0$.

d) Le produit de deux matrices nilpotentes est-il toujours nilpotent ?

e) Le produit de deux matrices A et B nilpotentes peut-il donner une matrice AB inversible ?

f) Montrer que si A est inversible , N est nilpotente et $AN = NA$ alors $A - N$ est inversible.

Indication – Bien sûr c'est donc vrai aussi pour $A + N$. Le $A - N$ est donc déjà une indication, nous avons traité un cas particulier de ceci.

Exercice 7. On appelle centre de $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \forall g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\}$.

a) On suppose ici E de dim. finie et on se propose ici de déterminer $\mathcal{C}$ matriciellement.

Soit $C = \{A \in M_n(\mathbb{K}),\ \forall\, M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$ appelé centre de $M_n(\mathbb{K})$.

En étudiant en particulier les produits $AE_{i,j} = E_{i,j}A$, montrer que si $A \in C$ alors A est de la forme λI_n. En déduire le centre $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}(E)$.

b) En utilisant la caractérisation vue en cours des homothéties, à savoir que f est une homothétie de E si, et seulement si, $\forall\, v \in E$, $(v, f(v))$ liée (*savoir redém.*), obtenir le même résultat en raisonnant au niveau des endomorphismes (sans hyp. dim. E finie).

Exercice 8 (Matrice de la multiplication à gauche par A)**.** a) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

Soit $L_A : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$ l'application « multiplication à gauche par A ».

On ordonne la base canonique de $M_2(\mathbb{K})$ sous la forme $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$. Ecrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(L_A)$.

b) Généraliser pour $A \in M_n(\mathbb{K})$. En déduire notamment le $\mathrm{rg}(L_A)$ en fonction du rang de A.