

Chap. H1 : espaces préhilbertiens, espaces euclidiens
I Déf. générale des produits scalaires

1) Formes bilinéaires : Ici le corps de base est un corps $\mathbb{K}$ qcq.

a) (i) **Déf. (application bilinéaire)** Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. On dit qu'une application $f : E \times F \rightarrow G$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$ est *bilinéaire* ssi les deux conditions suivantes sont réalisées :

- (1) Linéarité à gauche : pour tout $v \in F$, l'application $f(\cdot, v) : u \in E \mapsto f(u, v) \in G$ est linéaire,
- (2) Linéarité à droite : pour tout $u \in E$, l'application $f(u, \cdot) : v \in F \mapsto f(u, v) \in G$ est linéaire.

(ii) Exemples déjà connus :

(iii) **Déf. (forme bilinéaire sur un espace vectoriel E).** Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. Une *forme bilinéaire* sur E est une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$.

b) Exemple en dimension deux :

(i) écriture générale de toutes les F.B. dans une base de E de dim. 2.

$$\varphi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

(ii) Codage de φ par une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(iii) Calcul matriciel possible : $\varphi(x, y) = {}^tXAY$

c) Généralisation en dim. n : écriture $\varphi(x, y) = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} a_{i,j}x_iy_j$ où $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$.

d) Forme bilinéaire symétrique :

(i) Déf. φ est symétrique ssi $\forall (u, v) \in E^2$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

(ii) Caract. en dim. finie : φ est symétrique ssi $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i)$ où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

(iii) Ecriture dans une base en dim. 2 : $\varphi(x, y) = \alpha x_1y_1 + \beta(x_1y_2 + x_2y_1) + \gamma x_2y_2$.

2) La déf. abstraite des p.s. et premiers exemples

a) Déf. (p.s. sur E un $\mathbb{R}$ -e.v. quelconque) : un p.s. sur E est une forme bilinéaire symétrique *définie-positive* i.e. vérifiant $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) > 0$.

En pratique, on vérifie souvent "définie positive" avec les deux conditions : 1) φ est *positive* i.e. $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$ et 2) $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Notations possibles $(u|v)$ ou $\langle u, v \rangle$ ou $\langle u|v \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si on met des flèches aux vecteurs.

b) Premiers exemples :

(i) Dans E de dimension deux, où on a fixé une base $\mathcal{B}$, $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

(ii) Généralisation : p.s. $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{B}}$ associé à une base $\mathcal{B}$ dans E de dim. finie. $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$

(iii) Exemple en dim. infinie : dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$: $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$.

(iv) Exemple matriciel : dans $M_{m,n}(\mathbb{R})$: produit scalaire associé à la base canonique $(E_{i,j})$.

Par déf. $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $(A|B) = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} a_{i,j}b_{i,j}$.

Ecriture condensée : $(A|B) = \text{Tr}(A^tB)$.

c) Etude systématique des p.s. en dim. deux :

(i) Une FBS est la donnée de $\varphi : (x, y) \mapsto ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$.

(ii) Exemple : vérifier que $\varphi : (u, v) \mapsto 2x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_1) + 7x_2y_2$ définit un p.s. sur $\mathbb{R}^2$

(iii) Etude générale sur la forme du (i) : Par la méthode de la forme canonique : φ est définie positive si, et seulement si, $a > 0$ et $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = ac - b^2 > 0$.

Ce résultat n'est pas au programme. L'essentiel : savoir faire la "forme canonique" sur les exemples.

II Notion d'orthogonalité et norme associées à un p.s. :

Dans tout ce qui suit, on a fixé un p.s. qu'on note $\varphi = (\cdot | \cdot)$, sur un $\mathbb{R}$ -e.v. E .

Définition : Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire fixé $(\cdot | \cdot)$ s'appelle un *espace préhilbertien* et est noté comme un couple $(E, (\cdot | \cdot))$.

1) Orthogonalité

a) Vecteurs orthogonaux : $u \perp v$ (pour φ) ssi $\varphi(u, v) = 0$.

Rem. : Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

Conséq. : Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul.

b) Vecteur orthogonal à un s.e.v., déf. : $u \perp F \Leftrightarrow \forall v \in F, u \perp v$.

Caract. si $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$, on a $u \perp F \Leftrightarrow \forall i \in [1, r], u \perp v_i$.

c) Sous-espaces orthogonaux : $F \perp G \Leftrightarrow \forall u \in F, \forall v \in G, u \perp v$.

Rem. $F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$.

En part. deux plans dans $\mathbb{R}^3$ ne seront jamais orthogonaux. En revanche, on a une notion, *plus faible* de plans *perpendiculaires*, cf. pl.

d) Prop. (dém.) Une famille de vecteurs tous non nuls 2 à 2 orthogonaux est libre.

2) Norme euclidienne associée à un p.s

a) Déf. générale : $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une *norme* sur l'e.v. E ssi (3 propriétés) :

— $\forall v \in E, N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

— (Homogénéité) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E, N(\lambda v) = |\lambda|N(v)$,

— (I.T.) $\forall (u, v) \in E^2, N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.

b) Prop. Soit $(\cdot | \cdot)$ un p.s. sur un e.v. E , alors l'application $N : v \mapsto \sqrt{(v|v)}$ est bien une norme, dite *norme euclidienne associée* au p.s. On note aussi $N(u) = \|u\|$.

Pour vérifier l'I.T., on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous :

3) Inégalité de Cauchy-Schwarz

a) (i) Énoncé : pour $(\cdot | \cdot)$ un p.s. et $N : v \mapsto \sqrt{(v|v)}$ on a :

$$\forall (u, v) \in E^2, |(u|v)| \leq N(u).N(v).$$

(ii) *Preuve 1* – Avec l'étude systématique des p.s. en dim. 2 du I. 2) c), appliquée au plan $\text{Vect}(u, v)$ (si u, v non col.).

(iii) Conséq. de la preuve, *importante CNS d'égalité dans Cauchy-Schwarz* : u, v colinéaires.

(iv) *Preuve 2* – Sans faire référence au résultat du I. 2. c), on introduit $\varphi(t) = (u + tv|u + tv)$, *polynôme du second degré qui garde un signe constant* : $\Delta \leq 0$

b) (i) Application de C-Schwarz à la preuve de l'I.T.

(ii) *Importante C.N.S. d'égalité dans l'I.T.* : u et v *positivement* colinéaires ($\neq$ C.Schwarz).

c) Traduction de Cauchy-Schwarz pour le p.s. can de $\mathbb{R}^n$, pour le p.s. $\int_0^1$.

Penser à l'homogénéité des deux membres si on remplace v par λv .

4) Manipulations sur $\|u + v\|^2$:

L'essentiel : la norme au carré est plus manipulable que la norme : c'est le carré scalaire.

a) Développement de la norme au carré d'une somme :

$$\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u|v).$$

Appl. écriture du p.s. en fonction de la norme : $(u|v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$.

b) Égalité de Pythagore : si $u \perp v$, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

c) Égalité du parallélogramme : $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

III Propriétés différentes en dimension finie et en dimension infinie :

1) Distinction de terminologie

Déf. : un espace vectoriel préhilbertien de dimension finie s'appelle un *e.v. euclidien*.

2) Bases orthonormées (dim. finie)

- a) (i) Déf. u est un vecteur *unitaire* ou *normé* ssi $\|u\| = 1$.
 (ii) Déf. $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthogonale ssi $\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$.
 (iii) Déf. $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille orthonormée (ou orthonormale) ssi $\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, (v_i | v_j) = \delta_{i,j}$.
 (iv) On a vu qu'une famille orthonormée est toujours libre. Une b.o.n. est une famille o.n. qui est une base.

b) Forme du p.s. dans une b.o.n. :

(i) Caract. Soit $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors :

$\mathcal{B}$ est o.n. si, et seulement si, $\forall (u, v) \in E^2, (u | v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (coord. dans $\mathcal{B}$).

(ii) Ainsi, si on fixe une base $\mathcal{B}$, on sait que pour le p.s. $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{B}}$ déf. plus haut, c'est une b.o.n.

(iii) Question : si on se donne "autrement" un p.s sur E de dim. finie, peut-on toujours trouver une base $\mathcal{B}$ qui est o.n. pour φ i.e. tel que $\varphi = (\cdot | \cdot)_{\mathcal{B}}$?

Exemple 1 : peut-on trouver une b.o.n. pour le p.s. défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi : (u, v) \mapsto 2x_1 y_1 + 3(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 7x_2 y_2 ?$$

Exemple 2 : montrer que dans $E = \mathbb{R}_2[x], (f, g) \mapsto \int_0^1 fg$ définit un p.s. et trouver une b.o.n.

Réponse générale : oui, obtenu comme suit :

c) Orthogonalisation de Gram-Schmidt :

• But : obtenir à partir d'une famille libre $(u_1, \dots, u_d)$ qcq une famille orthogonale $(v_1, \dots, v_d)$ avec la propriété que pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \text{Vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i)$.

• Mise en oeuvre : $v_1 = u_1, v_2 = u_2 + \lambda v_1$ avec λ tel que $(v_2 | v_1) = 0$ etc.

• Si on veut ensuite une famille orthonormée, on remplace les v_i par $\frac{v_i}{\|v_i\|}$.

d) Mise en oeuvre sur les deux exemples du b) (iii)

e) Conséquences théorique du procédé de Gram-Schmidt :

(i) Théorème : dans un espace euclidien, on a toujours des bases orthonormées.

(ii) Mieux, on peut compléter toute famille orthonormale en une base orthonormale (T.B.I. + Gram Schmidt).

f) Intérêt de posséder des bases orthonormées : écriture sympa du p.s. !

(i) On a vu que, quel que soit le p.s. $(\cdot | \cdot)$, avec les coordonnées dans $\mathcal{B}$ base orthonormée E il s'écrit toujours $(u | v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

(ii) De même $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

(iii) Obtention des coordonnées par p.s. : si $(e_1, \dots, e_n)$ b.o.n., $\forall v \in E, v = \sum_{i=1}^n (v | e_i) e_i$

Autrement dit : $(v | e_i)$ donne la composante du vecteur v sur e_i .

(iv) Appl. aux endomorphismes : dans $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n. si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $a_{i,j} = (e_i | f(e_j))$.

3) Orthogonal d'un sous-espace (dim. qcq/dim. finie)

a) Orthogonal d'une partie quelconque d'un e.v. E muni d'un p.s. :

(i) Déf. Soit $A \subset E$, on définit $A^\perp = \{v \in E, \forall a \in A, v \perp a\}$.

(ii) Prop. Si $A \subset B$ alors $A^\perp \supset B^\perp$.

(iii) Si A est une partie quelconque, alors $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

En pratique, dans la suite, on s'intéresse essentiellement aux orthogonaux de s.e.v. mais par le (iii), ce n'est pas restrictif...

- b) Prop. générales : (i) Prop.₁ : G orthogonal à F ssi $G \subset F^\perp$.
(ii) Prop.₂ : $F^\perp$ est un s.e.v. Par prop.₁, c'est le plus grand s.e.v. orthogonal à F .
c) Propriété spécifique à la dim. finie :
Si E est de dim. finie, alors $F \oplus F^\perp = E$.
Dans ce cas $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .
d) Contre-exemple en dim. infinie : ex. planche.
e) Preuve et pratique : $F^\perp$ s'obtient en complétant une b.o.n. de F en une b.o.n. de E .
f) Exercice important (cf. pl.) écriture de $(F + G)^\perp$ et de $(F \cap G)^\perp$.

4) Projection orthogonale dans E de dim. finie

- a) (i) Remarque préliminaire : si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$ alors $G = F^\perp$.
(ii) Déf. si E est un espace euclidien et si F est un s.e.v. de E alors on a $E = F \oplus F^\perp$ et on appelle projecteur orthogonal sur F le projecteur sur F de noyau $F^\perp$. On le notera p_F .

b) Caractérisation : p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il existe une b.o.n. de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- c) Prop. $p_F(v)$ est l'unique vecteur w de F tel que $v - w$ est orthogonal à F .

d) Prop. (Pythagore) :

- (i) Déf. $d(v, F) = \inf \{d(v, w), w \in F\} = \inf_{w \in F} \|v - w\|$.

(ii) Théorème : $\forall v \in E, \exists ! w_0 \in F, d(v, F) = \|v - w_0\|$ et $w_0 = p_F(v)$.

Autrement $\|v - p_F(v)\|$ réalise le $\min \{\|v - w\|, w \in F\}$.

e) Calcul pratique du projeté orthogonal :

- (i) Si $(e_1, \dots, e_d)$ b.o.n. de F alors $p_F(v) = \sum_{i=1}^d (v|e_i)e_i$.

(ii) Si $(u_1, \dots, u_d)$ est une base non orthonormée, on calcule $p_F(v) = \sum_{i=1}^d \lambda_i u_i$ grâce aux d conditions $(v|u_i) = (p_F(v)|u_i)$.

f) Cas particuliers utiles :

- (i) Projection orthogonale sur une droite $D = \mathbb{R}u : \forall x \in E, p_D(x) = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$.

(ii) Projection orthogonale sur un hyperplan H : on considère un vecteur normal $u, p_H(x) = x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$ par $p_H = \text{id} - p_{H^\perp}$.

5) Lemme de représentation de Riesz et retour sur la théorie des équations

- a) Prop (Riesz) : Soit $E, (,)$ un espace euclidien et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire.

Alors il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que $\varphi = (u|\square)$.

Preuve immédiate en coordonnées !.

b) Application à la théorie des équations (comparer au G1 et G2) :

Si on se donne F un s.e.v. de $E = \mathbb{R}^n$ définie par m F.L. $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$.

Alors en écrivant $\varphi_i(x) = (u_i|x)$, F s'interprète comme $\text{Vect}(u_1, \dots, u_m)^\perp$.

On retrouve que $\dim(F) = n - \dim \text{Vect}(u_1, \dots, u_m) = n - \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.

C'est la théorie de l'orthogonalité des vecteurs qui résout ici ce problème de la dimension.

c) Cas des matrices :

- (i) Toute forme linéaire $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, s'écrit $\varphi = \text{Tr}(A\square)$.

(ii) Ce résultat n'est cependant par limité au cas réel : pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque, on a :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \text{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$$