Exercice 3 (Théorème de cours sur les Matrices par bloc)**.** On peut à l'intérieur d'une matrice, considérer des "blocs" et sous certaines conditions exprimer le produit de deux matrices à l'aide du produit de blocs. Précisément : soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ où A, B, C, D et A', B', C', D' sont aussi des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec les propriétés suivantes :

— Le nombre de colonnes de A et de C (qui est le même vu l'écriture "par bloc") est égal au nombre de lignes de A' et B'

— Le nombre de colonnes de B et de D est égal au nombre de lignes de C' et D'.

Autrement dit pour être complètement précis : $A \in M_{m_1,n_1}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m_2,n_1}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m_1,n_2}(\mathbb{K})$, $D \in M_{m_2,n_2}(\mathbb{K})$ et $A' \in M_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B' \in M_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C' \in M_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $D' \in M_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$.

Donner alors la forme explicite du produit $M \times N$ en fonction de $A, B, C, D, A', B', C', D'$.

Solution 3 **Solution 1** – Ce résultat se voit simplement sur la définition du produit de matrice.

on obtient $M \times N = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$.

En effet, pour $i \leq m_1$ et $j \leq p_1$, on a : $(M \times N)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} M_{i,k} N_{k,j} = \sum_{k=1}^{n_1} M_{i,k} N_{k,j} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} M_{i,k} N_{k,j}$.

Or pour $i \leq m_1$ et $k \leq n_1$, $M_{i,k} = A_{i,k}$ et $N_{k,j} = A'_{k,j}$ pour $j \leq p_1$.

Pour $i \leq m_1$ et $k \in [\![n_1 + 1, n_1 + n_2]\!]$, $M_{i,k} = B_{i,k-n_1}$ et pour $j \leq p_1$ $N_{k,j} = C'_{k-n_1,j}$.

Donc $(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_1} A_{i,k} A'_{k,j} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} B_{i,k-n_1} C'_{k-n_1,j} = (AA')_{i,j} + (BC')_{i,j}$ d'où l'égalité pour le premier bloc. De même pour les autres blocs. □

Solution 2 — Il est aussi instructif de pouvoir rédiger ceci *géométriquement*.

On note $p = p_1 + p_2$, $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$.

On considère les A.L. g (resp. f) can. assoc. à M (resp. N).

On notera $M = \mathrm{Mat}(g)$ et $N = \mathrm{Mat}(f)$ en omettant la mention des bases *canoniques* des $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p$ resp.

On considère la décomposition $\mathbb{K}^p = E_1 \oplus E_2$ de l'espace de départ de f où E_1 est formé des p_1 premiers vecteurs de la base canonique et E_2 des p_2 suivants.

On considère de même les décompositions $\mathbb{K}^n = F_1 \oplus F_2$ et $\mathbb{K}^m = G_1 \oplus G_2$ avec les mêmes conventions. On considère enfin r_1 le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 et r_2 le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1. Enfin π_1 (resp. π_2) le projecteur sur G_1 (resp. G_2) parallèlement à G_2 (resp. G_1). (Ouf!)

On écrit $M \times N = \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(g \circ f)$ où $A'' = \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ (g \circ f)_{|E_1})$ est une matrice $m_1 \times p_1$.

Alors $f_{|E_1} = r_1 \circ f_{|E_1} + r_2 \circ f_{|E_1}$.

Et $\pi_1 \circ g \circ f_{|E_1} = \pi_1 \circ g \circ r_1 \circ f_{|E_1} + \pi_1 \circ g \circ r_2 \circ f_{|E_1}$.

Donc $A'' = \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g \circ f_{|E_1}) = \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g \circ r_1 \circ f_{|E_1}) + \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g \circ r_2 \circ f_{|E_1})$.

Mais en notant $g_1 = g_{|F_1}$, on sait que $g \circ r_1 = g_1 \circ r_1$.

De même en notant $g_2 = g_{|F_2}$), on sait que $g \circ r_2 = g_2 \circ r_2$.

Autrement dit $A'' = \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g_1) \times \mathrm{Mat}(r_1 \circ f_{|E_1}) + \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g_2) \times (r_2 \circ f_{|E_1})$. (Toutes ces matrices étant entendues relativement aux bases canoniques).

On conclut bien que $A'' = A \times A' + B \times C'$. De même pour les trois autres blocs. □