

DM 18 : Trigonalisation et applications aux suites réc. linéaires

Les parties 1 et 2 sont obligatoires pour ce samedi

1ère partie : trigonalisation sous forme de Jordan d'une matrice 3×3

a) Etude des puissances d'une matrice triangulaire supérieure particulière

Pour tout couple de nombres réels (a, b) , on note $J(a, b)$ la matrice :

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Donner une formule explicite pour les puissances $J(a, b)^n$ de $J(a, b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $M_\lambda = M - \lambda I_3$.

Déterminer, par opérations élémentaires sur les *lignes* de M_λ , les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\text{rg}(M_\lambda) < 3$. Ces λ sont appelées les *valeurs propres* de M .

c) On note $E_1 = \ker(\Phi - \text{id})$ et $E_2 = \ker(\Phi + 3 \text{id})$

- Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 formée de vecteur(s) de dernière coordonnée égale à 1 dans la base canonique.
- Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de E_2 formée de vecteur(s) de dernière coordonnée égale à 1 dans la base canonique.

d) Existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ est *diagonale*?

e) i) On note $F_1 = \ker((\Phi - \text{id})^2)$

Montrer que $E_1 \subset F_1$ et que F_1 est de dimension deux.

ii) On note, dans toute cette question e), $f = (\Phi - \text{id})|_{F_1}$.

Déterminer un vecteur $w \in \ker(f^2)$ qui n'est pas dans $\ker(f)$: on choisira w pour que sa troisième coordonnée dans la base canonique soit un 1.

iii) Déterminer une base $\mathcal{C} = (w', w)$ de F_1 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

iv) En déduire $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\Phi|_{F_1})$.

f) Conclure enfin qu'il existe une base $\tilde{\mathcal{C}}$ de $E = \mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\Phi) = J(1, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

g) Donner une matrice P explicite telle que $M = PJ(1, -3)P^{-1}$.

h) Exprimer de même M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n et des matrices P et P^{-1} .

Deuxième partie : application à des suites récurrentes linéaires

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite à valeurs réelles définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}.$$

a) Ecrire une fonction PYTHON, qu'on notera u , qui prend un entier n en argument et renvoie la valeur u_n

b) **Vectorialisation** : Pour chaque entier n , on définit un vecteur $U_n \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ par $U_n =$

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

- i) Expliciter une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ii) En déduire une relation matricielle simple entre U_n et U_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Déduire de la première partie une écriture *explicite* de U_n en fonction de n , P et P^{-1} .

Troisième partie : généralisons à fond !

Le but de cette partie, plus abstraite, est de donner une démonstration plus agréable du théorème général vu au DM 16 sur la forme des suites vérifiant une relation récurrente linéaire d'ordre n quelconque, au moins sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes,

On fixe les notations suivantes :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $(a_{p-1}, \dots, a_0) \in \mathbb{C}^p$ et soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n = 0\}$ l'e.v. des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire dont les coefficients sont les a_k .

1) Généralisation de la formulation matricielle de la deuxième partie :

Soit $(u_n) \in \mathcal{E}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{C})$.

Déterminer une matrice $A \in M_p(\mathbb{C})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A.U_n$.

Ainsi on ramène une relation de réc. d'ordre n pour la suite (u_n) à une relation de réc. d'ordre 1 pour la suite des vecteurs U_n . C'est l'idée de la *vectorialisation* qu'on a déjà rencontrée pour les E.D. en Python.

2) Généralisation de la réduction faite dans la première partie :

a) Soit A la matrice trouvée au 1). Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence :

$$\text{rg}(A - \lambda I_p) < p \Leftrightarrow P(\lambda) = 0,$$

où $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0 = 0$.

Ce polynôme P sera appelé ici *polynôme caractéristique* de la relation de récurrence linéaire $u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n = 0$.

b) **Un gros théorème admis ici (« théorème de Jordan dans le cas particulier des matrices compagnons »)**

Hypothèse et notation : on considère l'écriture scindée dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme caractéristique P du a), qu'on note :

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans $\mathbb{C}$ deux à deux distinctes et $m_1, \dots, m_r$ dans $\mathbb{N}^*$ les multiplicités des racines.

On appelle *matrice de Jordan* $J_r(\lambda)$ la matrice de taille r , de la forme $J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Conclusion (admise) la matrice A du 1) est semblable à la matrice *diagonale par blocs*

$$J = \text{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_r}(\lambda_r)).$$

c) Forme explicite des puissances de la forme de Jordan :

- (i) Soit $J_r(\lambda)$ une matrice de Jordan de taille r . Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_r(\lambda)^k$.
- (ii) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme de J^n où J est la matrice de b).

d) Synthèse : A l'aide de tout ce qui précède, démontrer le théorème suivant : l'espace vectoriel E qu'on a défini comme $\{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n = 0\}$ est plus explicitement l'espace des suites (u_n) qui peuvent s'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n P_i(n), \quad \text{où } P_i \in \mathbb{C}_{m_i-1}[X].$$

e) Pour $p = 2$ retrouver les deux cas des suites réc. linéaires d'ordre 2 (dans $\mathbb{C}$) suivant que le discriminant Δ de l'équation caractéristique vale 0 ou 1. **Enfin, le cas $\Delta = 0$ est « déparachuté » !**

Retrouver aussi le cas vu dans l'exemple de la deuxième partie pour $p = 3$ et un polynôme caractéristique particulier.

N.B. L'existence de la forme de Jordan n'est pas si compliquée, mais ce n'est pas un résultat du programme de prépa. On peut la démontrer (par exemple) avec une étude attentive de la suite des noyaux itérés, mais c'est une autre histoire ...