DM 17 : solutions

1 Calculs d'inverses de matrices particulières (cours §II 1) du G2)

1.1 Par l'inversion du système $Y = AX$: des systèmes ici très « symétriques »

a) Avec les notations de l'énoncé, et pour toutes les colonnes X et Y dans $M_{n,1}(\mathbb{Q})$ on a l'équivalence :

$$Y = AX \Leftrightarrow (S) \begin{cases} y_1 = x_2 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ y_i = x_1 + \cdots + \widehat{x_i} + \cdots + x_n \\ y_n = x_1 + \cdots + x_{n-1} \end{cases}$$

où la notation avec le chapeau à la i-ième ligne signifie que le terme x_i est omis.

Or (S) est équivalent au même système où on rajoute la ligne : **pour symétriser davantage le rôle des x_i**

$$L = L_1 + \cdots + L_n \ : \ (\sum_{i=1}^n y_i) = (n-1)\sum_{i=1}^n x_i,$$

Ligne L qu'on réécrit (en supposant $n > 1$ sinon la question est triviale : si $n = 1$, A est la matrice nulle, qui n'est pas inversible)

$$L \ : \ \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n y_i) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Via les opérations : $L_i \leftarrow L - L_i$, on obtient alors que (S) est équivalent au système $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n y_i) - y_1, \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n y_i) - y_n \end{cases}$

autrement dit au système :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2-n}{n-1}y_1 + \dfrac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n-1} y_i) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n-1} y_i) + \dfrac{2-n}{n-1}y_n \end{cases}$$

Ainsi, on a montré que pour tout $(X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{Q})^2$, $Y = AX \Leftrightarrow X = MY$ avec $M = \dfrac{1}{n-1}\begin{pmatrix} (2-n) & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 & (2-n) \end{pmatrix}$ ce qui démontre que A est inversible d'inverse M.

Dans ces preuves, il est très important de raisonner par *équivalence*.

b) C'est exactement le même calcul qu'au a). Le résultat du a) n'est que le cas particulier $a = 0$, $b = 1$ du b).

Avec les mêmes notations :

$$Y = BX \Leftrightarrow (S) \begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 + \cdots + bx_n \\ \vdots \\ y_i = bx_1 + \cdots + bx_{i-1} + ax_i + bx_{i+1} + \cdots + bx_n \\ y_n = bx_1 + \cdots + bx_{n-1} + ax_n \end{cases}$$

De même (S) est équivalent au même système où on rajoute la ligne

$$L = L_1 + \cdots + L_n \; : \; (\sum_{i=1}^{n} y_i) = ((n-1)b + a)(\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

On distingue des cas :

• Cas 1 : $((n-1)b + a) = 0$. Dans ce cas, la ligne L dit que $L_1 + L_2 + \cdots + L_n = 0$ donc les lignes de la matrice B sont liées. On verra en cours sur les matrices que cela signifie que la matrice B n'est pas inversible, car on montrera que $\mathrm{rg}(B)$ est aussi $\mathrm{rg}(L_1, \ldots, L_n)$. (Comme nous n'avons pas encore vu ce résultat, on peut aussi : raisonner géométriquement et dire que pour l'endomorphisme canoniquement associé à B l'image est incluse dans l'hyperplan $y_1 + \cdots + y_n = 0$ d'où la même conclusion, ou encore dire que comme B est une matrice symétrique, on a aussi $C_1 + \cdots + C_n = 0$ et donc les colonnes de B sont liées.).

• Cas 2 : $((n-1)b + a) \neq 0$. Dans ce cas on réécrit L sous la forme :

$$L \; : \; \frac{1}{(n-1)b + a}(\sum_{i=1}^{n} y_i) = (\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Via les opérations : $L_i \leftarrow L_i - bL$, on obtient alors que (S) est équivalent au système :

$$\begin{cases} (a-b)x_1 = y_1 - \dfrac{b}{(n-1)b+a}(\sum_{i=1}^{n} y_i) = \dfrac{1}{(n-1)b+a}((n-2)b+a)y_1 - b(\sum_{i=2}^{n} y_i)) \\ \vdots \\ (a-b)x_n = y_n - \dfrac{b}{(n-1)b+a}(\sum_{i=1}^{n} y_i) - y_n = \dfrac{1}{(n-1)b+a}(-b(\sum_{i=1}^{n-1} y_i) + ((n-2)b+a)y_n) \end{cases}$$ ce qui amène encore une distinction de cas :

•• Cas 2.1 : $a = b$. Dans ce cas la matrice B a toutes ses entrées identiques, elle est de rang inférieur ou égal à 1 donc non inversible (on suppose encore $n > 1$).

•• Cas 2.2 : $a \neq b$. Dans ce cas :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{(b-a)((n-1)b+a)}\left(-((n-2)b+a)y_1 + b(\sum_{i=2}^{n} y_i)\right), \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{(b-a)((n-1)b+a)}\left(b(\sum_{i=1}^{n-1} y_i) + (1-(n-1)b-a)y_n\right) \end{cases}$$

Donc $(S) \Leftrightarrow X = NY$ avec $N = \dfrac{1}{(b-a)((n-1)b+a)}\begin{pmatrix} (2-n)b-a & b & \ldots & & b \\ b & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & b \\ b & & & b & (2-n)b-a \end{pmatrix}$

Ce qui montre que B est inversible d'inverse N.

c) Déjà cela fait moins peur si on écrit concrètement $C = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

On considère le système associé $CX = Y$ i.e. (S) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + \cdots + x_n = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + \cdots + 2x_n = y_2 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + (n-1)x_n = y_{n-1} \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = y_n \end{cases}$

Via les opérations suivantes (**attention à l'ordre des opérations**) :
$L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, jusqu'à $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \\ x_2 + \cdots + x_n = y_2 - y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = y_{n-1} - y_{n-2} \\ x_n = y_n - y_{n-1} \end{cases}$$

On est ramené à un système T.S. qu'on résout de bas en haut.

On trouve $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit d'une matrice *tridiagonale*, on reparlera des matrices de cette famille.

N.B On peut aussi formuler le même calcul en écrivant non pas le système mais la matrice C et la matrice I et conduire les opérations élémentaires sur C et sur I ensemble (pivot matriciel, cf. cours).

1.2 Par une relation polynomiale vérifiée par A

Une idée générale : si une matrice A vérifie une relation polynomiale de la forme $a_pA^p + a_{p-1}A^{p-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$ alors $A(a_pA^{p-1} + \dots + a_1I) = -a_0I$ et si $a_0 \neq 0$, on en déduit que l'inverse de A est $-\dfrac{1}{a_0}(a_pA^{p-1} + \dots + a_1I)$.

a) Par calcul matriciel direct, on obtient $A^2 = (n-1)I + (n-2)A$ ce qui donne $A(A-(n-2)I) = (n-1)I$ et finalement $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}((2-n)I + A)}$ ce qui est bien le résultat du 1.1. a).

b) De même par calcul direct, on obtient que $B^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha = a^2 + (n-1)b^2$ et $\beta = 2ab + (n-2)b^2$.

Par rapport au 1.1. b) on va distinguer provisoirement (c'est un artefact de la méthode), le cas $b = 0$ ou pas.

Supposons provisoirement $b \neq 0$: Alors $\dfrac{\beta}{b}B - B^2 = (\dfrac{\beta.a}{b} - \alpha)I$ et en chassant le dénominateur :

$$\beta B - bB^2 = (\beta.a - \alpha b)I \text{ ou encore } \boxed{B(\beta I - bB) = (\beta a - \alpha b)I \quad (\dagger)}$$

Le cartouche nous invite donc à distinguer suivant que $\beta a - \alpha b \neq 0$ ou pas.

En outre $\beta a - \alpha b = 2a^2b + a(n-2)b^2 - a^2b - (n-1)b^3 = a^2b + a(n-2)b^2 - (n-1)b^3 = b(a-b)((n-1)b+a)$. Cette dernière factorisation est facile à trouver si on a fait le 1.1. b)...

Ainsi, en resimplifiant par b dans $(\dagger)$ on obtient :

$$B((2a + (n-2)b)I - B) = (a-b)((n-1)b + a)I \quad (\ddagger)$$

On retrouve alors la discussion du 1.1. b) (heureusement !)

Si $a \neq b$ et $((n-1)b + a) \neq 0$, on déduit de $(\ddagger)$ que B est inversible d'inverse :

$$\boxed{B^{-1} = \frac{1}{(a-b)((n-1)b+a)}((2a + (n-2)b)I - B) = \frac{1}{(b-a)((n-1)b+a)}(B + (-2a + (2-n)b)I).}$$

N.B. On se dit que la moindre des choses est de vérifier que c'est le même résultat qu'au 1.1. b) :

• Pour les entrées diagonales de B^{-1} la formule qu'on vient de trouver donne au numérateur $a - 2a + (2-n)b = -a + (2-n)b$ ce qui est le résultat du 1.1. b).

• Pour les entrées non diagonales, la même formule donne b au numérateur, ce qui est encore le résultat du 1.1. b).

c) En calculant $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (grâce aux $i^2 = -1$) puis $C^4 = 16I$ on voit que $C^3/16$ est l'inverse de C.

On trouve ainsi que $C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$

Remarque généralisation : Cette matrice C est le cas particulier $n = 4$ de la matrice Ω suivante :

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Soit $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2n-2} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$.

On peut montrer que Ω est inversible (on le saura après le cours sur le déterminant car c'est une matrice de Vandermonde), et calculer que son inverse est $\frac{1}{n}\overline{\Omega}$ où le barre sur la matrice signifie que l'on conjugue toutes les entrées de la matrice. Cette formule est l'avatar matriciel d'une formule d'inversion de la transformée de Fourier, mais là c'est une autre histoire.

1.3 En explicitant plus facilement l'inverse d'une A.L. définissant cette matrice :

a) Cas d'une matrice de permutation : notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{Q}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P$.

Autrement dit pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = e_{i+1}$ et $f(e_n) = e_1$.

Il est alors immédiat que si on définit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{Q})$ en se donnant les valeurs de g sur $\mathcal{B}$ par $\forall\, i \geq 2, g(e_i) = e_{i-1}$ et $g(e_1) = e_n$, on a $(g \circ f)(e_i) = e_j$ donc $(g \circ f)$ coïncide avec id sur la base $\mathcal{B}$ donc $g \circ f = \mathrm{id}$ ce qui suffit (endo. en dim. finie) pour dire que $g = f^{-1}$. Ainsi :

$$P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Généralisation : notion générale de matrice (ou d'endomorphisme) de permutation

On rappelle qu'une permutation σ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est une bijection de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. L'ensemble des ces bijections forme un groupe pour la loi $\circ$ qu'on note souvent $(S_n, \circ)$ (appelé *groupe symétrique*, qu'on étudiera plus en détail au H2, déterminants).

A chaque $\sigma \in S_n$, on peut associer l'endormorphisme $f_\sigma : \ e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$ et sa matrice P_σ dans la base canonique.

On vérifie facilement qu'en notant $E = K^n$ (pour K un corps quelconque) les applications $(S_n, \circ) \to (GL(E), \circ)$, $\sigma \mapsto f_\sigma$ d'un côté et $(S_n, \circ) \to (GL_n(K), \times)$, $\sigma \mapsto P_\sigma$ de l'autre sont des morphismes de groupes.

En particulier $\forall\, \sigma \in S_n$, $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

C'est ce que nous avons expérimenté ici avec la permutation *circulaire* : $\sigma : i \mapsto i+1$ si $i \leq n-1$ et $\sigma(n) = 1$.

b) Matrice binomiale (dite de Pascal) : Soit $T = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in TS_{n+1}(\mathbb{Q})$.

On considère $E = \mathbb{Q}_n[X]$ l'e.v. des polynômes de degré au plus n à coefficient dans $\mathbb{Q}$.

Soit $\Phi : \ E \to E$, $P \in E \mapsto Q$ tel que $\forall, x \in \mathbb{Q}$, $Q(x) = P(x+1)$.

On note $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de E avec $\forall\, x \in \mathbb{Q}$, $e_k(x) = x^k$.

Alors d'après la formule du binôme, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = T$.

Or de manière évidente $\Phi^{-1} : E \to E$, $Q \mapsto R$ où $\forall x \in \mathbb{Q}$, $R(x) = Q(x-1)$.

D'après la formule du binôme, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $(x-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} x^i$.

Donc $T^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi^{-1})$ est la matrice T.S. dont les entrées, numérotées par les indices de 0 à n, vérifient :

$$\forall\,(i,j) \in [\![0,n]\!],\ i \leq j \Leftarrow (T^{-1})(i,j) = (-1)^{j-i}\binom{j}{i}$$

1.4 Généralité de la méthode du 1.2 : existence d'un polynôme annulateur et sous-algèbres

Enoncé juste :

> a) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ il existe un entier $r \leq n^2$ des coefficients $(a_0,\dots,a_r) \neq (0,\dots,0)$ tels que $a_0 I + a_1 A + \cdots + a_r A^r = 0$.
> Le polynôme $P : X \mapsto a_0 + a_1 X + \cdots + a_r X^r$ s'appelle un *polynôme annulateur de A*

.

a) Comme $M_n(\mathbb{K})$ est de dim. n^2, on est sûr que la famille $(I, A, \dots, A^{n^2})$ formée de n^2+1 éléments est liée.

Soit r le plus petit entier tel que $(I, A, \dots, A^r)$ est liée. En part. $(I, A, \dots, A^{r-1})$ est libre et donc (*savoir réexpliquer*) A^r s'écrit comme C.L. de $(I, A, \dots, A^{r-1})$.

On a donc une écriture $A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$.

Ou encore : $A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_1 A = -a_0 I$.

b) La relation précédente s'écrit encore $(A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \cdots + a_1 I)A = -a_0 I \quad (*)$.

On veut diviser par a_0 :

On est sûr que $a_0 \neq 0$: en effet sinon $(*)$ s'écrirait $BA = 0$ avec $B = (A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \cdots + a_1 I)$ ce qui comme A est inversible, donne $B = 0$ ce qui donnerait $(I, A, \dots, A^{r-1})$ liée et une contradiction avec la minimalité de r dans la déf. donnée plus haut.

En divisant par $-a_0$ dans $(*)$, on a donc :

$A(-\frac{1}{a_0}A^{r-1} - \frac{a_{r-1}}{a_0}A^{r-2} + \cdots - \frac{a_1}{a_0}I) = I$.

En posant $\alpha_{r-1} = -\frac{1}{a_0}$ et pour tout $i \leq r-2$, $\alpha_i = -\frac{a_{i+1}}{a_0}$, on a :

$A(\alpha_{r-1}A^{r-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I) = I$, ce qui prouve bien que $A^{-1} = (\alpha_{r-1}A^{r-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I)$.

c) Par l'expression du b), $A^{-1} = (\alpha_{r-1}A^{r-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I)$. Or, pour $A \in \mathcal{A}$, par stabilité par $\times$ tous les A^k pour $k \in \mathbb{N}$ sont dans $\mathcal{A}$ et par stabilité par C.L. $(\alpha_{r-1}A^{r-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I) \in \mathcal{A}$ donc $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

1.5 Le cas des matrices triangulaires : utilisation de toutes les méthodes précédentes

a) Si l'un des coefficient diagonaux est non nul, disons à la colonne i. Alors les colonnes $(C_1, \dots, C_i)$ sont dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$.
Donc $\mathrm{rg}(C_1, \dots, C_i) \leq i-1$ et donc $\mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n) \leq n-1$ autrement dit la matrice T n'est pas inversible.

b) i) On note $T = (a_{i,j})$
Soient X et Y deux matrices colonne telles que $Y = TX$.
$Y = TX \Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ y_i = \sum_{k=i}^{n} a_{i,k}x_k$.
Notons $P(i)$ le prédicat : $P(i)$: x_i est une combinaison linéaire de $y_i, \dots, y_n$ autrement dit :

$$P(i)\ :\ \exists\,(\lambda_{i,i}, \dots, \lambda_{i,n}) \in \mathbb{K}^{n-i+1},\ x_i = \sum_{k=i}^{n} \lambda_{i,k} y_k.$$

On va montrer que $P(i)$ est vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ par récurrence descendante.

- Initialisation : $P(n)$ est vraie car on a $y_n = a_{n,n}x_n$ avec $a_{n,n} \neq 0$, donc $x_n = \frac{1}{a_{n,n}}y_n$.
- Supposons $P(i+1)$ vraie pour un $i < n$.

Alors $y_i = a_{i,i}x_i + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k}x_k$ et par $P(i)$, alors :

$$y_i = a_{i,i}x_i + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k}(\sum_{j=k}^{n} \lambda_{k,j}y_j).$$

Donc :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}(y_i - \sum_{k=i+1}^{n}\sum_{j=k}^{n} a_{i,k}\lambda_{k,j}y_j) \text{ car } \ a_{i,i} \neq 0.$$

Ceci démontre $P(i)$.

La récurrence est établie. $\square$

Dans les deux méthodes suivantes, on suppose connu le fait que T est inversible et on montre que T^{-1} est T.S.

ii) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ quelconque et f son application. lin. associée dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

On note $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$.

On sait que $\boxed{A \in TS_n(\mathbb{K}) \text{ si, et seulement si, } \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ f(F_i) \subset F_i.}$

(On dit que f stabilise le drapeau canonique).

Supposons donc $A \in TS_n(\mathbb{K})$ et A inversible.

Alors f est bijective, par injectivité pour chaque i, $\dim(f(F_i)) = \dim(F_i)$.

Compte-tenu de l'inclusion $f(F_i) \subset F_i$, on obtient l'égalité $f(F_i) = F_i$.

Alors en appliquant f^{-1}, on obtient $f^{-1}(F_i) = F_i$ pour chaque i.

Grâce à l'encadré, on en déduit que A^{-1} est aussi T.S.

iii) Comme $TS_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$, si $T \in TS_n(\mathbb{K})$ est inversible, on sait par 1.4. c) que $T^{-1} \in TS_n(\mathbb{K})$.

1.6 Le cas de « petites sous-algèbres » de $M_n(K)$

a) i) vérifions que $\mathcal{A}$ est une *sous-algèbre* de $M_n(K)$.

Par déf. $\mathcal{A}$ est un s.e.v. par déf., donc il suffit de vérifier que $I \in \mathcal{A}$ (ce qui est vrai par déf.), et que $\mathcal{A}$ est stable par $\times$.

Or si on prend deux éléments de $\mathcal{A}$ qui s"écrivent $(ai + bE)$ et $(cI + dE)$ le produit se développe en $acI + (bc + ad)E + bdE^2$. Comme $E^2 = nE$, on en déduit que ce produit est bien dans $\mathcal{A}$. $\square$

ii) On a $A = E - I$ on cherche $B = aE + bI$ telle que $AB = I$. Sachant que $E^2 = nE$,

$$\begin{aligned} AB = I \quad &\Leftrightarrow \quad (aE + bI)(E - I) = I, \\ &\Leftrightarrow \quad aE^2 + (b - a)E - bI = I, \\ &\Leftrightarrow \quad (na + (b - a))E - bI = I, \\ &\Leftrightarrow \quad b = -1 \quad \text{et} \quad b = (1 - n)a, \end{aligned}$$

Comme on peut supposer $n > 1$, on obtient que $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } B = \frac{1}{n-1}E - I}$.

iii) On cherche $C = \alpha I + \beta E$ telle que $CB = I$ autrement dit $(\alpha I + \beta E)((a - b)I + bE) = I$.

Or $(\alpha I + \beta E)((a - b)I + bE) = \alpha(a - b)I + (\alpha b + (a - b)\beta)E + \beta bE^2$.

En outre $E^2 = nE$, donc $(\alpha I + \beta E)((a - b)I + bE) = I \Leftrightarrow \alpha(a - b)I + (\alpha b + (a - b)\beta + nb\beta)E = I$.

Comme (I, E) est $\mathbb{K}$ libre, ceci équivaut à $\alpha(a - b) = 1$ et $\alpha b + (a - b)\beta + nb\beta = 0$.

1er cas : $a - b = 0$. Dans ce cas la première équation est impossible. En outre dans ce cas, on est sûr dès le début que B n'est pas inversible puisque toutes ses colonnes sont identiques.

2ème cas : $a-b\neq 0$. La première équation donne $\alpha=\dfrac{1}{a-b}$ et la seconde $\beta(nb+(a-b))=-\alpha b \quad (*)$.

Si $(nb+(a-b))\neq 0$, on conclut que $\boxed{B \text{ est inversible d'inverse } \dfrac{1}{a-b}(I-\dfrac{b}{nb+(a-b)}E)}$.

Si $(nb+(a-b))=0$, autrement dit $(n-1)b+a=0$, on s'aperçoit que si on pose $C=C_1+\dots+C_n$ où C_j est la j-ième colonne de B, on a $C=0$. Donc dans ce cas B n'est pas inversible puisque ses colonnes sont liées.

Morale ici : des trois méthodes de calculs vues pour B^{-1} celle-ci est la plus simple.

b) *Pour voir et comprendre pourquoi A^{-1} a la même forme que A : vivent les algèbres !* – En notant encore E la matrice dont toutes les entrées valent 1, et en notant en plus $J=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$, on a $A=E+3I+2J$.

On sait déjà que $E^2=5E$. On remarque que $EJ=JE=E$, et que $J^2=I$ ce qui suffit pour montrer que $\mathcal{A}=\{aI+bJ+cE,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Donc, en utilisant la question 1.4. c), l'inverse de A est dans $\mathcal{A}$ ce qui explique la forme du résultat de l'exercice.

C'était quand même remarquable que A^{-1} avait "la même forme" que A.

Mieux on peut en déduire (comme au a)) une façon de calculer A^{-1}.

On cherche $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que $(aI+bJ+cE)(E+3I+2J)=I$.

En développant ceci est équivalent à $(3a+2b)I+(2a+3b)J+(a+b+10c)E=I$

Comme I,J,E indép. ceci équivaut au système $\begin{cases}3a+2b=1,\ 2a+3b=0,\\ a+b+10c=0\end{cases}$ qui équivaut à $(a,b,c)=(\frac{3}{5},-\frac{2}{5},-\frac{1}{50})$.

2 Conditions d'inversibilité sans calculs d'inverse

2.1 Autour du résultat classique sur les matrices à diagonales dominantes : C.S. d'inversibilité

2.1.2 Variantes plus simples ou plus complexes... à vous de jouer

a) Soit $M=(m_{i,j})\in M_n(\mathbb{R})$ avec $m_{i,j}=1$ pour tout $i\neq j$ et pour tout $i=1,\dots,n$, $m_{i,i}=a_i>1$. Montrer que M est inversible.

(M1) Comme on ne demande pas le calcul de l'inverse on peut se contenter de montrer que $\ker M$ est réduit à $\{0\}$.

Or si $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $MX=0$ alors on a le système $\begin{cases}a_1x_1+x_2+\dots+x_n=0,\\ \vdots\\ x_1+\dots+x_{n-1}+a_nx_n=0\end{cases}$

Or pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, en notant L_i la ligne i de ce système, via L_i-L_j on a : $(a_i-1)x_i+(1-a_j)x_j=0$.

En notant $\alpha_i=a_i-1>0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a alors $\alpha_1x_1=\dots=\alpha_nx_n \quad (*)$.

Donc par exemple la première ligne donne alors $(a_1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}+\dots+\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1})x_1=0$.

Comme le facteur $a_1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}+\dots+\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1})$ est strictement positif, on en déduit que $x_1=0$, ce qui dans $(*)$, donne que $x_1=x_2=\dots=x_n=0$. □

(M2) On peut calculer simplement le rang par pivot sur les colonnes. Remarque : ici on pourrait même calculer l'inverse.

b) **Remarque 1 :** l'hyp. sur le signe des $a_{i,j}$ donne qu'en fait $-\sum_{j\neq i} a_{i,j} = \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ et que $a_{i,i} \geq 0$ donc on a bien en part. l'hyp. $|a_{i,i}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ des matrices à diagonales dominantes, mais avec une inégalité large.

Remarque 2 : par théorème du rang, pour montrer que $\ker A \oplus \operatorname{Im} A = M_{n,1}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\ker A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$.
Par l'absurde supposons qu'on ait un $X \neq 0$ dans $\ker A \cap \operatorname{Im} A$.
Alors : quitte à diviser X par $M = \max |x_i|$, on peut supposer que $\max |x_i| = 1$ et même qu'il existe un k tel que $x_k = +1$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$. L'ensemble (non vide puisqu'il contient k) des indices i tels que $x_i = 1$
Comme $AX = 0$ on sait que pour chaque i, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0$. Donc en prenant $i \in I$, on a : $a_{i,i} + \sum_{j\neq i} a_{i,j} x_j = 0$.
Donc $a_{i,i} = -\sum_{j\neq i} a_{i,j} x_j \quad (1)$.
Or par l'hyp $-a_{i,j} \geq 0$ et $x_j \leq 1$ pour tout j, on déduit de (1) que :
$a_{i,i} \leq -\sum_{j\neq i} a_{i,j}.$.
Or l'énoncé donne l'inégalité inverse d'où l'égalité ; $a_{i,i} = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}$.
Mais cette égalité dans la chaîne d'inégalités :

$$a_{i,i} = -\sum_{j\neq i} a_{i,j} x_j \leq -\sum_{j\neq i} a_{i,j} \leq a_{i,i}$$

dit aussi que l'inégalité centrale est une égalité autrement dit que :

$$\sum_{j\neq i} a_{i,j}(1 - x_j) = 0$$

Comme tous les $1 - x_j$ sont positifs et tous les $a_{i,j}$ sont négatifs ou nuls, cela signifie que tous les termes de la somme sont nuls.
Donc pour tous les $j \notin I$, $a_{i,j} = 0$.
Comme d'autre part on a supposé que $X \in \operatorname{Im} A$, on a un $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AY$.
Pour la i-ième coordonnée, avec $i \in I$, cette équation $X = AY$ donne $1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j$ et puisque les termes $a_{i,j}$ avec $j \notin I$ sont nuls, on peut la réduire à ;

$$1 = \sum_{j\in I} a_{i,j} y_j$$

Mais puisque $a_{i,i} = -\sum_{j\in I, j\neq i} a_{i,j}$, cette équation peut encore s'écrire :

$$1 = \left(\sum_{j\in I, j\neq i} a_{i,j} y_j\right) + a_{i,i} y_i = \left(\sum_{j\in I, j\neq i} a_{i,j} y_j\right) - \sum_{j\in I, j\neq i} a_{i,j} y_i = \sum_{j\in I, j\neq i} a_{i,j}(y_j - y_i) \quad (\dagger)$$

Or comme tous les $a_{i,j}$ sont négatifs, si on choisit i tel que $y_i = \max_{j\in I} y_j$, la somme $\sum_{j\in I, j\neq i} a_{i,j}(y_j - y_i)$ sera négative, ce qui donne une contradiction avec $(\dagger)$.

2.2 Conditions nécessaires sur les coefficients de certaines matrices inversibles

a) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont non nuls. Montrons que M^{-1} a au plus $n^2 - 2n$ coefficients nuls.

Par l'absurde, on suppose que M^{-1} a au moins $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$ coefficients nuls.

Si dans toutes les colonnes de M^{-1}, il y avait au moins 2 coefficients non nuls, cela ferait au plus $n.(n-2) = n^2 - 2n$ coefficients nuls au plus, ce qui est contraire à ce qu'on suppose.

Donc il y a au moins une colonne de M^{-1} où un seul coefficient est non nul.

Notons C_j cette colonne de M^{-1} et $a_{i,j} \neq 0$ l'entrée non nulle de cette colonne. Alors $M^{-1}(e_j) = a_{i,j} e_i$.

Autrement dit $M(e_i) = \dfrac{1}{a_{i,j}} e_j$. Mais alors la i-ième colonne de M a une seule entrée non nulle, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que M a tous ses coefficients non nuls.

N.B. *On peut donc affaiblir l'hyp. sur M et supposer seulement que M n'a pas de colonne avec une seule entrée non nulle.*

b) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ d'inverse $B = A^{-1}$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on ait $a_{i,j} \geq 0$ et $b_{i,j} \geq 0$. Montrons que dans chaque ligne de A il y a un et un seul élément non nul.

L'existence d'un élément non nul est évidente : si A avait une ligne nulle elle ne serait pas inversible.

Par simple produit on a $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \delta_{i,j}$ pour tout (i,j).

Supposons qu'on ait sur la ligne i deux entrées $a_{i,j}$ et $a_{i,l}$ non nulles.

Donc dans une somme $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,r} = 0$ pour $r \neq i$, on est sûr que $a_{i,k} b_{j,r} = 0$ et $a_{i,l} b_{l,r} = 0$ donne $b_{j,r} = b_{l,r} = 0$ donc les lignes L_j et L_l de B ont toutes leurs entrées à part sur la colonne i qui sont nulles, donc en particulier ces deux lignes sont proportionnelles, ce qui est une contradiction.

Remarques : 1) En appliquant le résultat précédent à la transposée, on conclut aussi que dans chaque colonne il y a un et un seul élément non nul.

2) On peut alors formuler le résultat de cet exercice comme une équivalence. La réciproque est la suivante : Si on a une matrice A à coefficients positifs, telle que dans chaque ligne et dans chaque colonne il y a exactement un élément non nul, cette matrice est facilement de rang n donc inversible et son inverse est aussi à coefficients positifs. □