DM 16 : Application de l'algèbre linéaire à l'espace des solutions d'une E.D.L. homogène d'ordre n à coeff. constant

DM facultatif, qui veut montrer « la structure d'algèbre en action » avec comme héroïne principale, l'algèbre des polynômes qui a le pouvoir d'agir dans bien d'autres algèbres, nous y reviendrons avec le cours sur les polynômes formels.

1) La notion générale de polynôme appliqué à un endomorphisme :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque. Soit $L \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Pour tout polynôme P défini par $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ où $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on définit : $P(L) = a_0 \,\mathrm{id} + a_1 L + a_2 L^2 + \cdots + a_n L^n$ où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, L^k désigne *la composition* $L \circ \cdots \circ L$ (k fois).

Démontrer la propriété suivante :

Propriété (résultat crucial qui sera repris en cours) pour chaque $L \in \mathcal{L}(E)$ fixé, l'application $\Phi : \mathbb{K}[x] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(L)$ est un *morphisme d'espaces vectoriels* et *un morphisme d'anneaux* de $(\mathbb{K}[x], +, \times)$ dans $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. On dit qu'on a un *morphisme d'algèbres*

N.B. La propriété clef à montrer et cruciale pour la suite est que si P et Q sont deux polynômes et $P.Q$ est leur produit alors $(P.Q)(L) = P(L) \circ Q(L)$.

2) Application au calcul itératif des dérivées

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et soit $D : E \to E$, $f \mapsto f'$ l'opérateur [1] de *dérivation.*

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. Justifier que pour toute fonction $f \in E$ pour calculer $g = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f$ avec $a_n \neq 0$, on peut procéder comme suit :

• on considère le polynôme $Q(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$.

• on considère son écriture scindée dans $\mathbb{C}$, qu'on écrit $Q(t) = (t + \mu_1) \ldots (t + \mu_n)$ avec $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$ non nécessairement distinct.

• On pose $f_0 = f$, $f_1 = f_0' + \mu_1 f_0$, et à chaque étape $f_k = f_{k-1}' + \mu_k f_{k-1}$ jusqu'à $f_n = f_{n-1}' + \mu_n f_{n-1}$.

Alors : $g = f_n$ (justifier).

Indication – Avec le 1), on sait que $g = Q(D)(f)$.

3) Une applications aux zéros

Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ayant au moins $(n+1)$ zéros dans I. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que le polynôme $P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ a toutes ses racines réelles.

Montrer qu'il existe un $\zeta \in I$ tel que $f^{(n)}(\zeta) + a_1 f^{(n-1)}(\zeta) + \cdots + a_n f(\zeta) = 0$.

4) Application au théorème sur les solutions d'une E.D.L. d'ordre n qcq à coefficients constants

Soit $(\mathcal{E})$: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ une E.D. linéaire d'ordre n à coefficients constants $(a_n, \ldots, a_0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$.

On note $S = \{y \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0\}$ l'ensembles des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solutions de $(\mathcal{E})$.

(On travaille pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ par soucis de simplicité).

a) Justifier que toute fonction $y \in S$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Justifier que S est un s.e.v. de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en le voyant comme le noyau d'un certain endomorphisme de E.

c) On associe à l'E.D. $\mathcal{E}$ une *équation caractéristique* $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$.

On note P le polynôme défini par $P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ qu'on appellera ici polynôme caractéristique de $\mathcal{E}$.

On voit que la donnée de $\mathcal{E}$ est équivalente à celle de P et donc on notera $\mathcal{E}(P)$ pour l'E.D.L. de polynôme caractéristique P.

On veut montrer, par récurrence sur n, le :

1. Le mot *opérateur* est d'emploi fréquent pour désigner des A.L. surtout dans les espaces de fonctions.

Théorème – *si on écrit* P *de manière scindée dans* $\mathbb{C}$, $P(r)=\prod_{k=1}^{d}(r-\alpha_k)^{m_k}$ *alors l'ensemble* S *de solutions de* $\mathcal{E}(P)$ *est l'ensemble des fonctions* y *de la forme :*
$y(t)=\sum_{k=1}^{d} q_k(t)e^{\alpha_k t}$ *où* q_k *est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à* m_k-1.

Vérifier cette propriété pour $n=1$ à partir des théorèmes que vous connaissez.

d) Pour bien comprendre ce résultat : traduisez le pour décrire l'ensemble des solutions de l'équation $y^{(3)}(x)-7y^{(2)}(x)+11y'(x)-5y(x)=0$.

e) Démonstration du théorème énoncé au c) :

On fixe P de degré n, qu'on écrit, comme dans le **théorème** : $P(r)=\prod_{k=1}^{d}(r-\alpha_k)^{m_k}$

On considère p.ex. la racine α_d de P, qu'on note simplement α et on écrit $P(r)=Q(r).(r-\alpha)$ où Q est donc un polynôme de degré $n-1$.

(i) Montrer à l'aide de ce qui précède que y est solution de $\mathcal{E}(P)$ si, et seulement si, la fonction z définie par $\forall\, x\in I,\ z(x)=y'(x)-\alpha y(x)$, est solution de $\mathcal{E}(Q)$.

(ii) En déduire une démonstration par récurrence sur n du théorème annoncé.
Indication – On distinguera deux cas pour remonter de la forme de $y'-\alpha y$ à celle de y.

5) Analogue du 4) pour les suites récurrentes linéaires :

a) Si on considère maintenant $F=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'e.v. des suites complexes. Déterminer une application linéaire $S\in\mathcal{L}(F)$ telle que l'ensemble des suites $(u_k)\in F$ vérifiant la relation de récurrence linéaire $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{k+3}=2u_{k+2}-2u_{k+1}+u_k$ se voit comme $\ker(S^3-2S^2+2S-\mathrm{id})$.

b) En déduire le théorème suivant analogue du théorème du 4)

b) **Théorème : (H)** Soit $P\in\mathbb{C}[r]$ unitaire de degré $n\geq 1$ qu'on écrit d'une part sous la forme développée : $P(r)=r^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1r+a_0$ et d'autre part de manière scindée :

$$P(r)=\prod_{i=1}^{d}(r-\alpha_i)^{m_i}.$$

Soit $\mathcal{E}(P)=\{(u_k)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \forall\, k\in\mathbb{N},\ u_{k+n}+a_{n-1}u_{k+n-1}+\cdots+a_1u_{k+1}+a_0u_k=0\}$ l'e.v. des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire de polynôme caractéristique P.

(C) $(u_k)\ \in\mathcal{E}(P)\Leftrightarrow\forall\, k\in\mathbb{N},\ u_k=\sum_{i=1}^{d}q_i(k)\alpha_i^k$, où chaque q_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à m_i-1.