

Sol. de l'ex. 5 pl. 38 (Stirling full-fledge)

Exercice 5 (Application à une preuve « naturelle mais plus longue » de la formule de Stirling). a)

On a vu en cours que $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$. Reprendre l'argument.

- b) On cherche maintenant un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln(n)$ de façon à avoir un D.A. à deux termes significatifs de $\ln(n!)$.

Pour cela, on va étudier la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$

- i) Dans quel exemple du cours a-t-on utilisé cette méthode ?

- ii) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.

- iii) Justifier que le terme de sommation des équivalents du § 2 s'applique aux sommes partielles de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et en déduire un équivalent simple de u_n .

- c) On étudie maintenant (pourquoi ?) $v_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n$. En appliquant encore la même méthode qu'au b), obtenir un équivalent de v_n .

- d) On étudie enfin (pourquoi ?) $w_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n)$. Montrer, avec la même méthode qu'au b), (encore !) que la suite (w_n) est convergente (sans déterminer sa limite qu'on notera k). Ecrire le D.A. à quatre termes significatifs obtenu pour $\ln(n!)$.

Conclure (enfin !) qu'il existe un K tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Solution 5 a) On a vu en cours que $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$. Reprendre l'argument.

- b) On cherche maintenant un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln(n)$ de façon à avoir un D.A. à deux termes significatifs de $\ln(n!)$.

Pour cela, on va étudier la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$

- i) Dans quel exemple du cours a-t-on utilisé cette méthode ?

Réponse : Pour passer de l'équivalent $H_n \sim \ln(n)$ au D.A. à deux termes significatifs : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

- ii) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.

Solution : Par déf. $u_{n+1} - u_n = \ln((n+1)!) - (n+1) \ln(n+1) - \ln(n!) + n \ln(n)$.

Mais $\ln((n+1)!) - \ln(n!) = \ln(n+1)$ donc $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - (n+1) \ln(n+1) + n \ln(n) = -n \ln(n+1) + n \ln(n) = -n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -1$. Cette limite est aussi bien sûr l'équivalent simple cherché !

- iii) Justifier que le théorème de sommation des équivalents du § 2 s'applique aux sommes partielles de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et en déduire un équivalent simple de u_n .

Solution - Ici $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$. La suite (v_n) constante égale à -1 est de signe constant, négatif !

Stricto-sensu le théorème du § 2 s'applique à une série à termes positifs. En considérant la série des opposées, on voit qu'on peut l'appliquer à une série dont les termes sont de signe constant.

Ainsi, ici, si on préfère, on applique donc le théorème du § 2 à $u_n - u_{n+1} \sim 1$. Il s'applique car $(v_n) = (1)$ est à termes positifs, et $\sum v_n$ est grossièrement divergente.

Le théorème du 2.1. s'applique donc et dit que $\sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n 1$.

Autrement dit (somme télescopique), $u_0 - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n + 1$.

Comme $n+1 \rightarrow +\infty$, et u_0 est fixé, on conclut que $u_{n+1} \sim -(n+1)$ ou encore $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n}$.

- c) On étudie maintenant (pourquoi ?) $v_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n$. En appliquant encore la même méthode qu'au b), obtenir un équivalent de v_n .

Solution – Pourquoi étudie-t-on cette suite (v_n) ? Parce qu'on vient de montrer que $\ln(n!) - n \ln(n) \sim -n$ et qu'on cherche maintenant un équivalent de la différence, pour avoir un terme de plus dans le D.A.

Comme au b), on étudie $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + (n+1) - n$ et avec le calcul du b) (ii), on sait donc que $v_{n+1} - v_n = -n \ln(1 + \frac{1}{n}) + 1$.

Pour avoir un équivalent de $v_{n+1} - v_n$, on considère donc un D.L. de $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

On a alors $v_{n+1} - v_n = -n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) + 1 = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

Ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, comme $(\frac{1}{2n})$ est une suite à termes positifs, t.g. d'une série divergente, on peut appliquer le théorème de sommation des équivalents aux sommes partielles qui donne que :

$$\sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Autrement dit (sommes télescopiques) $v_{n+1} - v_1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n)$.

Comme $\ln(n) \rightarrow +\infty$ et v_1 est constant, on conclut que $v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n)$.

Et comme $\ln(n) \sim \ln(n+1)$, on peut aussi écrire $\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n)}$.

- d) On étudie enfin (pourquoi?) $w_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n)$. Montrer, avec la même méthode qu'au b), (encore!) que la suite (w_n) est convergente (sans déterminer sa limite qu'on notera l). Ecrire le D.A. à quatre termes significatifs obtenu pour $\ln(n!)$.

Conclure (enfin!) qu'il existe un K tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Solution – La réponse au *pourquoi* est donnée par l'équivalent qu'on a obtenu au c). On étudie une fois encore la différence de w_n avec son équivalent.

On considère encore $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - \frac{1}{2} \ln(n+1) + \frac{1}{2} \ln(n) = 1 - n \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

A l'aide du D.L. $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, on en déduit : $w_{n+1} - w_n = 1 - n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \right)$.

Finalement $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

Comme $(\frac{-1}{12n^2})$ est t.g. d'une série de Riemann convergente, on en déduit que $\sum w_{n+1} - w_n$ converge, donc que la suite (w_n) converge. On note $l \in \mathbb{R}$ sa limite : $w_n = l + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Autrement dit, avec la déf. de (w_n) , $\ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n) = l + o(1)$. Ou encore : $\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + l + \varepsilon_n$.

En prenant l'exp. de cette *égalité*, $n! = \exp(n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + l) \cdot \exp(\varepsilon_n)$.

Or $\exp(n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + l) = n^n \cdot e^{-n} \sqrt{n} K$ où $K = e^l$, et comme $\exp(\varepsilon_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, on obtient bien l'équivalent :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K n^n \cdot e^{-n} \sqrt{n}.$$