

Exercice 5. a) Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F pouvant être de dim. infinie, vérifie $\dim \ker f$ est finie et F_1 est un s.e.v. de dim. finie, alors $f^{-1}(F_1)$ est un s.e.v. de dim. finie de E qui vérifie :

$$\dim f^{-1}(F_1) = \dim(F_1 \cap \operatorname{Im} f) + \dim \ker f.$$

b) En déduire que $\dim(E) - \dim f^{-1}(F_1) = (\dim(F) - \dim(F_1)) - (\dim(F) - \dim(F_1 + \operatorname{Im}(f)))$.

Ce qu'on note aussi $\operatorname{codim}(f^{-1}(F_1)) = \operatorname{codim}(F_1) - \operatorname{codim}(F_1 + \operatorname{Im}(f))$. Donc par préimage la codimension diminue. Elle est conservée quand f est surjectif.

Solution 5 a)

(M1) (Etienne avec le théorème du rang)

On remarque d'abord que $f^{-1}(F_1) = f^{-1}(F_1 \cap \operatorname{Im} f)$ puisque les éléments de F_1 qui ne sont pas dans $\operatorname{Im} f$ n'ont pas d'antécédents par f .

Comme $f : E \rightarrow \operatorname{Im} f$ est *surjective*, on sait (suivant l'exercice 3 de la planche) que :

$$f(f^{-1}(F_1 \cap \operatorname{Im} f)) = F_1 \cap \operatorname{Im} f,$$

donc avec la remarque précédente :

$$f(f^{-1}(F_1)) = F_1 \cap \operatorname{Im} f. \quad (*)$$

Notons $E_1 = f^{-1}(F_1)$. Avec $(*)$, on a : $f(E_1) = F_1 \cap \operatorname{Im} f$.

Comme $\ker f \subset E_1$ donc $\ker(f|_{E_1}) = \ker(f)$.

On applique donc le théorème du rang à $f|_{E_1}$, ce qui donne, (comme $\ker f \subset E_1$ donc $\ker(f|_{E_1}) = \ker(f)$) :

$$\dim(E_1) = \dim \ker(f|_{E_1}) + \dim \operatorname{Im}(f|_{E_1}) = \dim \ker(f) + \dim f(E_1) = \dim \ker f + \dim(F_1 \cap \operatorname{Im} f),$$

ce qui est la formule demandée.

(M2) En choisissant des antécédents pour les vecteurs d'une base de $F_1 \cap \operatorname{Im} f$ puis en complétant par une base du noyau

Soit $(y_1, \dots, y_n)$ une base de $F_1 \cap \operatorname{Im} f$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on choisit un antécédent un $x_i \in E$ tel que $f(x_i) = y_i$. Alors la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre (si elle était liée, son image par f le serait aussi) et par déf. les x_i sont dans $f^{-1}(F_1)$.

Soit $x \in f^{-1}(F_1)$. Alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$.

On en déduit que $x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \ker f$ $(*)$.

Soit alors $(z_1, \dots, z_m)$ une base de $\ker f$.

Par $(*)$, on en déduit que la famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$ est génératrice de $f^{-1}(F_1)$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est aussi libre. Il suffit de vérifier que $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n) \cap \ker f = \{0\}$ (car les deux sous-familles $(x_1, \dots, x_n)$ et $(z_1, \dots, z_m)$ sont libres).

Or si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \ker f$, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 0$ et par indép. linéaire des $f(x_i)$ on obtient que tous les λ_i sont nuls i.e. $x = 0$ c.q.f.d.

b) (Non fait en classe) En faisant $\dim(E) -$ chacun des deux membres de la formule du a), on a :

$$\dim(E) - \dim(E_1) = \dim(E) - \dim(\ker f) - \dim(F_1 \cap \operatorname{Im} f)$$

Par le théorème du rang pour f , on remplace $\dim(E) - \dim(\ker f)$ par $\dim \operatorname{Im} f$, ce qui donne :

$$\dim(E) - \dim(E_1) = \dim \operatorname{Im} f - \dim(F_1 \cap \operatorname{Im} f)$$

Vue la formule demandée, on applique Grassmann dans le second membre pour obtenir :

$$\dim(E) - \dim(E_1) = \dim(F_1 + \operatorname{Im} f) - \dim(F_1),$$

ce qui donne la formule de l'énoncé.

N.B. On appelle *codimension* d'un s.e.v. E_1 de E (si E est de dim. finie) la différence $\dim(E) - \dim(E_1)$.