

Compléments sur suites/séries : techniques pour obtenir des D.A.

Application de Cesaro pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1 (Cas des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ avec un point fixe indéterminé $|f'(l)| = 1$: une conséquence de Cesaro). a)

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est fixé et si u_n positive vérifie $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \rightarrow l \neq 0$, alors $u_n^\alpha/n \rightarrow l$ i.e. $u_n \sim (nl)^{\frac{1}{\alpha}}$.

N.B. – Le fait que u_n soit positive sert juste à définir u_n^α . Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, le même résultat est vrai pour u_n de signe quelconque.

- b) Exemple 1 : soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
 - i) Etudier la limite de (u_n) .
 - ii) En considérant $u_{n+1}^2 - u_n^2$, obtenir un équivalent simple de u_n pour $n \rightarrow +\infty$.
(Comparer l'information obtenue ici avec celle obtenue si on avait regardé "seulement" $u_{n+1} - u_n$.)
 - c) Exemple 2 : soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
 - i) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
 - ii) En considérant la suite $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ trouver un équivalent simple de u_n .
- Si vous trouvez les b) (ii) et c) (ii) parachutés, faites l'ex. 2.*

Exercice 2. (*) Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue admettant un développement limité de la forme : $f(x) = x - ax^\lambda + x^\lambda \varepsilon(x)$ avec $a > 0, \lambda > 1$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

On considère la suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Montrer que, quitte à restreindre V , on peut supposer que $\forall x \in V \setminus \{0\}$, $f(x) < x$.
- b) En considérant V avec la prop. supplémentaire du a), soit une suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $u_n \rightarrow 0$.
- c) Chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle pour $n \rightarrow \infty$.
- d) En déduire un équivalent de (u_n) quand $n \rightarrow \infty$.
- e) Appliquer ce qui précède à (u_n) et (v_n) définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$.
Remarque – Cet exercice explique d'où vient l'exposant α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle. En pratique, sauf aux concours (*), on devrait vous donner le α .

Cas des suites définies implicitement

Exercice 3 (Cas des suites définies implicitement : méthode de réintroduction successive).

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
- b) Donner un équivalent simple de x_n (pas dur!).
- c) En posant $a_n = x_n - n\pi$, et en remarquant que $a_n = \arctan(x_n)$, obtenir, par réintroduction successive, un D.A. de x_n à la précision $o(\frac{1}{n^2})$.

Cas des séries : deux théorèmes de seconde année... très proches de Cesaro

Exercice 4. a) Théorème de sommation des $\sim$ pour les sommes partielles de S.T.P. divergentes : reprendre ex. 5 DS 5.

b) En déduire un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \sin(\frac{1}{\sqrt{k}})$ quand $n \rightarrow +\infty$.

c) Théorème de sommation des $\sim$ pour les restes de S.T.P. convergentes : Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives telles que $\sum u_n$ converge et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. On sait alors que $\sum v_n$ converge et on note R_n (resp. R'_n) les restes d'ordre n de ces séries.

En s'inspirant de la preuve du a), montrer que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n$.

Exercice 5 (Application à une preuve « naturelle mais plus longue » de la formule de Stirling). a) On a vu en cours que $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$. Reprendre l'argument.

- b) On cherche maintenant un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln(n)$ de façon à avoir un D.A. à deux termes significatifs de $\ln(n!)$.
Pour cela, on va étudier la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$

- i) Dans quel exemple du cours a-t-on utilisé cette méthode ?
- ii) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.
- iii) Justifier que le terme de sommation des équivalents du § 2 s'applique aux sommes partielles de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et en déduire un équivalent simple de u_n .
- c) On étudie maintenant (pourquoi ?) $v_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n$. En appliquant encore la même méthode qu'au b), obtenir un équivalent de v_n .
- d) On étudie enfin (pourquoi ?) $w_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n)$. Montrer, avec la même méthode qu'au b), (encore !) que la suite (w_n) est convergente (sans déterminer sa limite qu'on notera k). Écrire le D.A. à quatre termes significatifs obtenu pour $\ln(n!)$.
Conclure (enfin !) qu'il existe un K tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K n^n e^{-n} \sqrt{n}$.