

Planche (*) : compléments sur les parties denses dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (Des parties denses importantes : des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$). a) Rappeler, avec démonstration, la forme de tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ (théorème du cours du C1).

b) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent des deux sous-groupes triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha = \inf(H \cap \mathbb{R}^{++})$.

Montrer que si $\alpha > 0$ alors $\alpha \in H$ puis que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

c) Montrer que si $\alpha = 0$ alors H est dense dans $\mathbb{R}$.

On vient de démontrer le :

Théorème de classification des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ (H.P. mais à connaître au niveau Mines-Pont) : tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Application à la somme de deux sous-groupes discrets). Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $a/b \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 (Application au groupe des périodes d'une fonction). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

On note $\Pi_f = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$.

a) A quelle condition sur l'ensemble Π_f la fonction f est-elle périodique ?

b) Justifier que Π_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

c) On a vu en exercice ci-dessus la forme des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

(i) Montrer que si $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ alors Π_f est dense.

(ii) Montrer que si f est continue non constante alors Π_f ne peut pas être dense. En déduire que si f est une fonction périodique continue non constante, f admet bien une plus petite période strictement positive.

Dans ce qui suit, on dit qu'une partie $C \subset A$ est dense dans A ssi tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de C .

Exercice 4 (Propriété clef transportée par les fonctions continues surjectives : transmission de la densité). Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow B$ continue surjective.

On suppose que $C \subset A$ est dense dans A . Montrer que $f(C)$ est dense dans B .

Exercice 5 (Application à des nombreuses parties denses). Montrer que

a) $A = \{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

b) $B = \{\tan(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Et dans $\mathbb{C}$?). a) Montrer que si $z = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$, la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

b) Classification des suites géométriques de raison $q \in \mathbb{U}$:

Soit $q \in \mathbb{U}$ et (z_n) la suite géométrique définie par la donnée d'un $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = qz_n$.

On note $\alpha = \text{Arg}(q)$.

(i) Que dire de la suite (z_n) si $\alpha/2\pi \in \mathbb{Q}$?

(ii) Que dire de la suite (z_n) si $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$?

c) Que dire alors du comportement d'une suite géométrique de rapport $z \in \mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ (seulement deux comportements possibles, à préciser).

d) Généraliser au cas où $|q| > 1$: dans ce cas, on sait que $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, mais que dire de la suite $(\text{Arg}(z_n))$?

Exercice 7. a) Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, non constantes, périodiques de périodes respectives T_1 et T_2 avec $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$. Montrer que (f_1, f_2) est une famille libre.

b) Généralisation du a) : soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues, toutes non constantes, la fonction f_i étant T_i -périodique et pour tout $i \neq j$, $T_i/T_j \notin \mathbb{Q}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Solution 1 a) On renvoie bien sûr à ce cours mais rappelons le résultat :

les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont exactement les $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{N}$.

Il est facile de voir, si $a \in \mathbb{N}$, que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, c'est le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par l'élément a .

L'idée essentielle pour la réciproque est de considérer un sous-groupe H , non réduit à zéro, de $(\mathbb{Z}, +)$, d'y considérer $a = \min(H \cap \mathbb{N}^*)$ (en justifiant que ce a existe!). L'inclusion $a\mathbb{Z} \subset H$ est alors évidente, et on montre l'autre inclusion en considérant pour chaque $x \in H$, la division euclidienne de x par a .

L'intérêt d'avoir appris et compris cette preuve est de pouvoir la réinvestir dans un autre contexte, comme on va le voir au b). On la retrouvera dans le chapitre sur les polynômes pour les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ (ou de n'importe quel anneau ayant une division euclidienne).

b) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent des deux sous-groupes triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha = \inf(H \cap \mathbb{R}^{++})$.

N.B. Cet inf existe bien car H n'étant pas réduit à 0 il contient un $x \in \mathbb{R}^*$, et par donc H contient x et $-x$ et donc $H \cap \mathbb{R}^{++} \neq \emptyset$. Ainsi $H \cap \mathbb{R}^{++}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0 donc admet un inf.

On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$.

(i) *Montrons qu'alors $\alpha \in H$ autrement dit que α est un min.*

Par l'absurde si $\alpha \notin H$. Alors par déf. de l'inf. on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $x \in H$ tel que :

$$\alpha < x < \alpha + \varepsilon,$$

(le fait que la première inégalité soit stricte venant de notre hypothèse $\alpha \notin H$).

En particulier en prenant $\varepsilon = \alpha$, il existe un $x \in H$ tel que :

$$\alpha < x < 2\alpha$$

Mais ce $x \neq \alpha$, pouvant, si on le souhaite, être écrit sous la forme $x = \alpha + \varepsilon'$ avec $\varepsilon' > 0$, en réappliquant la déf. de l'inf. on dispose d'un $y \in H$ tel que :

$$\alpha < y < x < 2\alpha.$$

Comme H est un sous-groupe, en considérant $h = y - x$, on obtient un élément $h \in H \cap \mathbb{R}^{++}$ tel que $0 < h < \alpha$ ce qui fournit une *contradiction* avec la déf. de $\alpha = \inf(H \cap \mathbb{R}^{++})$.

On a donc bien montré que $\alpha \in H$.

(ii) *Montrons maintenant que $H = \alpha\mathbb{Z}$*

Comme $\alpha \in H$ et que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, on sait que le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par α est lui-aussi inclus dans H donc que $\alpha\mathbb{Z} \subset H$.

Montrons l'inclusion réciproque : soit $x \in H$.

On doit remplacer la division euclidienne faite dans $\mathbb{Z}$ par la « division entière » dans $\mathbb{R}$

Soit n le plus grand entier dans $\mathbb{Z}$ tel que $n\alpha \leq x$. Autrement dit $n \in \mathbb{Z}$ et $n\alpha \leq x < (n+1)\alpha$ (autrement dit encore : $n = \lfloor x/\alpha \rfloor$).

Alors $x = n\alpha + r$ avec $r \in [0, \alpha[$.

Or $r = x - n\alpha$ et x et α sont dans H qui est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, donc par stabilité, $r \in H$.

Mais $r \in H \cap \mathbb{R}^+$ et $r < \alpha$, donc par déf. de α , on sait que $r = 0$. Donc $x = n\alpha$ et donc $x \in \alpha\mathbb{Z}$

Conclusion :

on a bien montré que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

c) On se place maintenant dans le cas où $\alpha = 0$, ce cas est radicalement différent du précédent. On va montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$ par la méthode de la flaque d'eau

Comme H est stable par $x \mapsto -x$, et $H \ni 0$, il suffit de montrer que H est dense dans $\mathbb{R}^{++}$.

Soient $0 < a < b$ dans $\mathbb{R}$, on veut montrer que $H \cap]a, b[\neq \emptyset$.

Or comme $\inf(H \cap \mathbb{R}^{++}) = 0$ il existe un $p \in H$ tel que $0 < p < (b - a)$.

Soit alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $mp \leq a < (m + 1)p$ autrement dit $m = \lfloor a/p \rfloor$.

Alors comme $p < (b - a)$ et $mp \leq a$, par addition de ces inégalités, on obtient l'inégalité stricte $(m + 1)p < b$.

Ainsi, en notant $h = (m + 1)p$, on sait que $a < h < b$ et d'autre part $h = (m + 1)p \in H$ puisque $p \in H$ et $(m + 1) \in \mathbb{N}$.

On conclut que $h \in]a, b[\cap H$, c.q.f.d. $\square$

N.B. 1 On connaît bien sûr des exemples concrets de sous-groupes denses de $(\mathbb{R}, +)$, comme $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{D}, +)$ ou encore l'ensemble $\mathbb{D}_2$ des nombres dyadiques.

N.B. 2 Il faut bien se représenter ces deux types de sous-groupes, d'un côté les $\alpha\mathbb{Z}$, de l'autre les denses, comme ayant une forme complètement opposée : d'un côté une « échelle » bien régulière $\alpha\mathbb{Z}$, avec toujours le même espace fixe entre deux éléments, et de l'autre un « nuage » dense...

Solution 2 On remarque d'abord que E est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ comme somme de deux sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

Scholie : En arithmétique, on avait vu que par exemple $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, le résultat annoncé ici dit que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a/b \notin \mathbb{Q}$, il se passe quelque chose de radicalement nouveau quand on ajoute des éléments de $a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$, on obtient une partie dense ! Par exemple $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense !

Ce n'est pas évident à première vue : sauriez-vous fabriquer explicitement des éléments positifs de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ aussi petits qu'on veut ? (Solution en fin de l'exercice)

Revenons à l'exercice : sachant que E est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ par le théorème de classification vu à l'exercice précédent, on sait que E n'est pas dense si, et seulement si, E est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.

On peut donc montrer plutôt que l'équivalence de l'énoncé, l'équivalence des négations :

Prop. $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $a/b \in \mathbb{Q}$.

Sens $\Rightarrow$ de la prop. : on a $E = \alpha\mathbb{Z}$ et $a \in E$ donc $a = m\alpha$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et de même $b = n\alpha$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Donc $a/b = m/n \in \mathbb{Q}$.

Sens $\Leftarrow$ de la prop. : on a $a/b \in \mathbb{Q}$, donc on peut écrire $a/b = m/n$ avec $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $m \wedge n = 1$.

$$\text{Alors } a = \frac{mb}{n} \text{ et } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{mb}{n}\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\left(\frac{m}{n}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\right) = \frac{b}{n}(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}) = \frac{b}{n}\mathbb{Z}.$$

$$\text{Ainsi } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z} \text{ avec } \alpha = \frac{b}{n}.$$

On a transformé le problème « topologique » (d'analyse) consistant à montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ était dense ssi $a/b \notin \mathbb{Q}$, en un problème « algébrique » consistant à étudier si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ était engendré par un seul élément

Solution à la question posée au début de l'exercice : trouver des éléments « explicites » de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ positifs strictement positifs, aussi petits qu'on veut ?

On considère $(\sqrt{2} - 1) \in]0, 1[$. Alors par la formule du binôme, on vérifie que : $(\sqrt{2} - 1)^n \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Or $(\sqrt{2} - 1)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Solution 3 a) f est périodique si, et seulement si, $\Pi_f \neq \{0\}$.

b) (i) Il est évident que $0 \in \Pi_f$.

(ii) Soit $(T_1, T_2) \in \Pi_f^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x + (T_1 + T_2)) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1)$ car $T_2 \in \Pi_f$ et $f(x + T_1) = f(x)$ car $T_1 \in \Pi_f$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + (T_1 + T_2)) = f(x)$ donc $T_1 + T_2 \in \Pi_f$.

(iii) Soit $T \in \Pi_f$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f((x - T) + T) = f(x - T)$ car $T \in \Pi_f$, donc $f(x) = f(x - T)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x - T) = f(x)$ donc $-T \in \Pi_f$

Ces trois prop. montrent que Π_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

c) (i) Soit $f = \chi_{\mathbb{Q}}$.

Soit $a \in \mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $a + x \in \mathbb{Q}$, donc $f(a + x) = f(x) = 1$.

Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $a + x \notin \mathbb{Q}$ (en effet par l'absurde si $a + x \in \mathbb{Q}$ alors $x = (a + x) - a \in \mathbb{Q}$).

Donc $f(a + x) = f(x)$.

Conséquence : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + a) = f(x)$ donc $a \in \Pi_f$.

Donc $\Pi_f \supset \mathbb{Q}$, donc Π_f est dense.

(En fait on vérifie immédiatement que $\Pi_f = \mathbb{Q}$ en reprenant le raisonnement précédent si $a \notin \mathbb{Q}$)

(ii) Soit f une fonction continue. On va montrer que Π_f est fermé ce qui signifie que si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Pi_f^{\mathbb{N}}$ converge vers un $T \in \mathbb{R}$ alors $T \in \Pi_f$.

Soit $(T_n) \in \Pi_f^{\mathbb{N}}$ telle que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $T \in \Pi_f$.

Or soit $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x + T_n) = f(x)$, et comme f est continue, on en déduit, en prenant la limite quand $n \rightarrow +\infty$, que $f(x + T) = f(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la conclusion : $T \in \Pi_f$ et Π_f est fermé.

Si $\Pi_f = \mathbb{R}$ alors f est constante.

On supposant désormais que f n'est pas constante, $\Pi_f \neq \mathbb{R}$, et par ce qui précède, Π_f ne peut PAS être dense dans $\mathbb{R}$.

Donc par le théorème de classification des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$, on en déduit qu'il existe un $T_0 > 0$ tel que $\Pi_f = T_0\mathbb{Z}$, et donc $T_0 = \min(\Pi_f \cap \mathbb{R}^{+*})$.

Solution 4 On considère ici la caractérisation *séquentielle* de la densité : pour montrer que $f(C)$ est dense dans B , on fixe un élément $b \in B$ et on veut fabriquer une suite d'éléments de $f(C)$ qui converge vers b .

Or comme f est *surjective*, on a un $a \in A$ tel que $b = f(a)$.

Comme C est dense dans A , pour ce $a \in A$ il existe une suite $(c_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Comme f est *continue* sur A , on sait alors que $f(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a) = b$.

La suite $(f(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi obtenue convient bien.

Solution 5 a) L'ensemble de l'énoncé est $\cos(\mathbb{N})$.

On aimerait appliquer le résultat sur l'image d'une partie dense par une application continue... mais $\mathbb{N}$ n'est pas (du tout!) dense dans $\mathbb{R}$!

Cependant, comme $\cos$ est paire, $\cos(\mathbb{N}) = \cos(\mathbb{Z})$, et comme $\cos$ est 2π -périodique, $\cos(\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$.

Cette fois c'est différent, $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe *dense* de $(\mathbb{R}, +)$ puisque $2\pi \notin \mathbb{Q}$.

Ainsi comme $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est *continue surjective* et que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on conclut bien que $\cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1, 1]$ et donc que A est dense dans $[-1, 1]$.

b) Remarquons d'abord que $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue, surjective*, et π -périodique.

L'ensemble B est bien défini car π étant *irrationnel*, les entiers $n \in \mathbb{Z}$, ne peuvent pas s'écrire $\pi/2 + k\pi$, donc $\tan(n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On sait par π -périodicité que $\tan(\mathbb{Z}) = \tan(\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense dans $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$ donc par continuité de $\tan$ sur $D_{\tan}$, on conclut que $\tan(\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z})$ est dense dans l'ensemble image qui est $\mathbb{R}$ entier.

Solution 6 a) La fonction $f = \exp(i\Box) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$ est *continue, surjective*, 2π -périodique.

De même qu'à l'exercice ci-dessus, l'image par f d'une partie dense de $\mathbb{R}$ donnera une partie dense de $\mathbb{U}$ (preuve strictement identique avec les suites).

Or $A = \{z^n, n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{in\alpha}, n \in \mathbb{Z}\} = f(\alpha\mathbb{N})$ et par 2π -périodicité, $A = f(\alpha\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$.

Comme par hyp. $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$, on a aussi $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$ et par l'exercice fait plus haut, on sait donc que $\alpha\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On conclut bien, par continuité et surjectivité de f sur $\mathbb{U}$, que $A = f(\alpha\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Enoncé plus difficile : montrer que la suite, cette fois indexée seulement par $\mathbb{N}$, des $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi dense dans $\mathbb{U}$.

Cette fois il s'agit de montrer que $\alpha\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ceci est reporté à l'exercice ci-dessous.

b) (i) Si $\alpha/2\pi \in \mathbb{Q}$, on l'écrit $\alpha/2\pi = p/r$ avec $(p, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Alors $q = e^{i\alpha}$, $q^n = e^{ni\alpha}$, et $z_n = e^{2\pi n i p/r} z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $z_r = e^{2i\pi n p} z_0 = z_0$ et la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc périodique de période r .

(ii) Si $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$, alors $\{e^{in\alpha}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$ (en admettant la version forte du a)).

Et $\{z_n, n \in \mathbb{N}\} = \{z_0 \cdot e^{in\alpha}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle de centre 0 et de rayon $|z_0|$ (comme image continue d'une partie dense par la bijection $z \mapsto z_0 \cdot z$).

Un exemple de suite dense : les valeurs de $((3/5 + i4/5)^n)_{n=0, \dots, 100}$

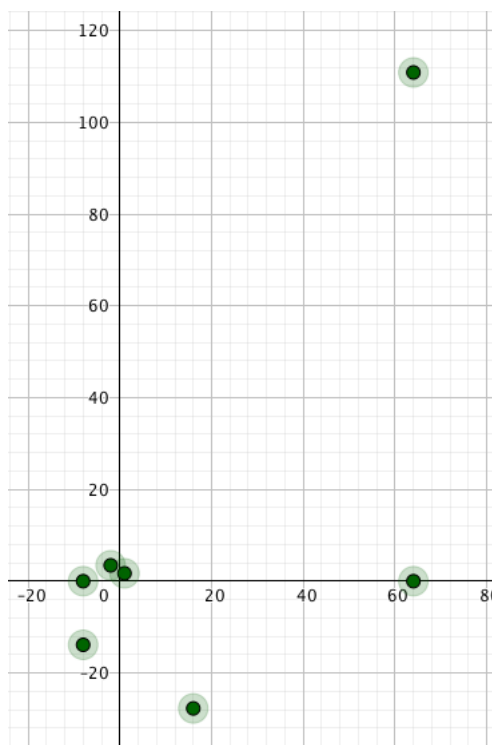
c) Ainsi une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{U}$ peut avoir seulement deux comportements, assez opposés : ou bien elle est périodique (et donc ne prend en particulier qu'un nombre fini de valeurs distinctes) ou bien elle est dense sur un cercle.

d) Dans le cas où $|q| > 1$: $z_n = |q|^n e^{in\alpha} z_0$.

Comme $|q| > 1$, on sait que $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, mais de même on a deux cas :

- si $\alpha/2\pi \in \mathbb{Q}$: $(\text{Arg}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique et donc la suite tend vers l'infini en spiralant mais en passant toujours par les mêmes demi-droites.

- si $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$, la suite des $\text{Arg}(z_n)$ est dense dans $] -\pi, \pi]$, donc la suite tend vers l'infini en spiralant mais avec des valeurs d'arguments « dense ».



Un exemple de q^n avec $q = (1 + i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{i\pi/3}$.

Solution 7 a) Soit λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$.

Alors $\lambda_1 f_1 = -\lambda_2 f_2$ et donc les deux membres égaux sont à la fois T_1 et T_2 périodique. Donc le groupe des période de ces fonctions continues $T_1\mathbb{Z} + T_2\mathbb{Z}$ qui est dense, et comme il est fermé par continuité, c'est $\mathbb{R}$ -entier. Donc les deux membres sont constants, et comme f_1 et f_2 sont non constantes, ceci force $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

b) Notons $H(n)$ le prédicat : si $(f_1, \dots, f_n)$ sont des fonctions continues non constantes telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction f_i est T_i périodique, et pour tout $i \neq j$, $T_i/T_j \notin \mathbb{Q}$, alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

- On sait que $H(1)$ est vraie car une fonction f_1 comme dans les hyp. de $H(1)$ est non constante, en part. non nulle.

- On a montré au a) que $H(2)$ est vraie aussi mais ce n'est pas logiquement nécessaire pour ce qui suit.

- H.R. Supposons $H(n)$ vraie pour un $n \geq 1$. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.

Soient $(f_1, \dots, f_{n+1})$ des fonctions continues non constantes telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction f_i est T_i périodique, et pour tout $i \neq j$, $T_i/T_j \notin \mathbb{Q}$.

Montrons que $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est libre.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i = 0$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i(x) = 0$ (1).

Mais en appliquant ceci à $x + T_{n+1}$, et comme f_{n+1} est T_{n+1} périodique, on a aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x + T_{n+1}) \right) + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x) = 0 \quad (2)$$

En faisant la différence (2) – (1), on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{(f_i(x + T_{n+1}) - f_i(x))}_{g_i(x)} = 0 \quad (3)$$

Pour chaque i , on note donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_i(x) = f_i(x + T_{n+1}) - f_i(x)$.

La fonction g_i est bien sûr T_i -périodique. Pour appliquer $H(n)$ et déduire de (3) que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, il suffit de montrer que les fonctions g_i sont *non constantes*.

Par l'absurde si une fonction g_i étant *constante*, égale à un $c \in \mathbb{R}$.

On aurait alors $f_i(x + T_{n+1}) - f_i(x) = c$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_i(x + kT_{n+1}) - f_i(x) = ck$.

Si $c \neq 0$ alors f_i serait *non bornée*, or f_i est continue périodique donc bornée, ce qui force donc $c = 0$.

Mais alors $f_i(x + T_{n+1}) - f_i(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ dit que f_i est T_{n+1} -périodique, or f_i est T_i -périodique, donc le groupe des périodes de f_i contient $T_i\mathbb{Z} + T_{n+1}\mathbb{Z}$, qui est dense, ce qui entraîne par continuité que f_i est constante *contradiction*.

Ainsi les fonctions g_i sont toutes non constante et l'H.R. appliquée à (3) donne bien que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Bien sûr ceci dans (1) donne $\lambda_{n+1} = 0$.

Ainsi $H(n+1)$ est vraie.

- La réc. est établie.