MPSI 1 **Samedi 21 Mars 2020**

Devoir 6 (3h30)

Problème : méthodes d'accélération de convergence de suites

Idée générale : Lorsqu'une suite (u_n) converge vers une limite ℓ, une *méthode d'accélération de convergence* de (u_n) est une méthode qui permet de remplacer (u_n) par une suite (v_n) déduite de (u_n) et dont le calcul n'est pas beaucoup plus compliqué que celui de (u_n), ayant la propriété que $(v_n - \ell) = o(u_n - \ell)$ donc qui converge *beaucoup plus vite* vers ℓ que (u_n).

Les calculatrices (ou python) sont autorisés. Les documents de cours aussi. Les communications entre vous ou internet : non. Arrêt 11h30, scanner et mettre sur la dropbox

N.B. Les parties I d'un côté et II et III de l'autre sont complètement indépendantes. Par ses aspects numériques et ses approximations la partie I 2) peut être un peu surprenante, mais elle veut vous familiariser avec des raisonnements plus *approximatifs* qu'on trouve dans certains sujets d'informatique commune.

Un résultat du II est utilisé au début du III, mais il est rappelé. Pour le reste II et III sont indépendantes.

Partie I : méthodes illustrées sur l'approximation de e

1) **L'accélération par les D.L.**

a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$. Déterminer un équivalent simple de $e - u_n$ quand $n \to +\infty$.

b) La suite (u_n) du a) converge *lentement* vers e, pas mieux qu'un $O(1/n)$. Une méthode *d'accélération* de convergence de (u_n) consiste à remplacer (u_n) par la suite (v_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n(1 + \dfrac{\alpha}{n})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est bien choisi ici pour que $v_n - e = O(1/n^2)$. Justifier qu'un tel α existe ici, et expliciter le.

c) (i) Expliciter un développement asymptotique de $\ln(u_n)$ à la précision $O(1/n^3)$.

(ii) En écrivant le développement du (i) sous la forme $1 = \ln(u_n) + \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$, expliciter une suite (w_n) déduite de (u_n) par une formule simple, telle que $w_n - e = O(1/n^3)$ ce qui accélère encore la convergence.

2) **Notion générale de coefficient de convergence d'une suite :**

Les terminologies et le « style » de ce paragraphes sont celles des maths numériques... c'est un peu dépaysant parfois mais très utile pour des sujets d'informatique aussi.

Définition – Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un réel ℓ. Supposons en outre qu'à partir d'un certain rang $u_n \neq \ell$. Si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right)$ converge vers un nombre λ, alors ce nombre λ s'appelle *coefficient de convergence* de (u_n). En outre :

- si $|\lambda| = 1$, on dit que la convergence est *lente*,
- si $0 < |\lambda| < 1$, on dit que la convergence est *géométrique*;
- si $\lambda = 0$ on dit que la convergence est *supergéométrique* ou en maths numérique juste *rapide* [a]

a. moi je dirais très rapide, ils sont durs en affaires les matheux numériques, car géométrique ça va déjà vite!

a) Comment qualifieriez vous alors la convergence des suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ du 1) ? *On utilisera les calculs du 1) sans faire de nouveau calculs. Pour (w_n) on pourra admettre un résultat plus précis que le calcul du 1) c) si besoin.*

b) Justifier que pour une suite (u_n) quelconque qui converge vers ℓ, le nombre de décimales [1]

1. chiffres après la virgule

correctes de ℓ obtenues quand on remplace ℓ par u_n est donné par $-\log|u_n-\ell|$ (ou presque). [2]

On en déduit(*rien à démontrer*) que pour $n,p\in\mathbb{N}$, le « nombre de décimales gagnées » en passant de l'approximation u_n de ℓ à l'approximation u_{n+p} de ℓ est : $-\log\left|\dfrac{u_{n+p}-\ell}{u_n-\ell}\right|$.

c) Supposons que (u_n) a une convergence géométrique de coefficient de convergence λ. En remplaçant (abusivement [3]) pour n grand, $\left|\dfrac{u_{n+p}-\ell}{u_n-\ell}\right|$ par $|\lambda|$, déterminer la valeur de λ à partir de laquelle « on gagne à peu près une décimale par itération », c'est-à-dire :

$$|u_{n+1}-\ell|\leq\frac{1}{10}|u_n-\ell|$$

d) Soit (u_n) une suite qui converge *lentement* vers ℓ au sens de la définition de l'encadré. Pour un $n\in\mathbb{N}$ donné si on veut gagner une décimale à partir de l'approximation u_n de ℓ, on veut trouver un nombre $p(n)$ tel que $|u_{n+p(n)}-\ell|\leq\dfrac{1}{10}|u_n-\ell|$. Justifier que dans ce cas, $p(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Autrement dit, le nombre d'étapes de calculs qu'il faut pour gagner une décimale de plus tend vers l'infini !

e) Cas des suites à convergence rapide :

On dit par exemple que la convergence est *quadratique* lorsque $\left(\dfrac{u_{n+1}-\ell}{(u_n-\ell)^2}\right)$ admet une limite finie non nulle.

Comment évolue le nombre de décimales correctes entre $(u_n-\ell)$ et $(u_{n+1}-\ell)$ dans ce cas (avec les mêmes approximations qu'à la question précédente) ?

Remarque : D'une manière générale, lorsque la convergence est supergéométrique, le nombre de décimales justes gagnées à chaque étape tend vers l'infini.

3) **Accélération d'une convergence géométrique :**

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un ℓ avec une convergence géométrique de rapport λ avec $|\lambda|\in]0,1[$, c'est-à-dire telle que $u_{n+1}-\ell\sim\lambda(u_n-\ell)$.

Soit (v_n) la suite définie par $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-\lambda u_n}{1-\lambda}$.

a) Montrer que (v_n) converge plus vite vers ℓ que (u_n) c'est-à-dire que $v_n-\ell=o(u_n-\ell)$.

b) On suppose que (u_n) admet un D.A. de la forme $u_n=\ell+\lambda^n+\mu^n+o(\mu^n)$ avec $|\lambda|>|\mu|$. Quel est alors le coefficient de convergence de (v_n) ? Comment trouver une suite (w_n) qui converge encore plus vite vers ℓ ?

4) **La méthode précédente appliquée à une suite extraite de la suite (u_n) du 1) :**

On revient à la suite $(u_n)=\left((1+\dfrac{1}{n})^n\right)$ du 1). On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=u_{2^n}$.

a) Justifier qu'on peut faire le calcul de $U_n=(1+\dfrac{1}{2^n})^{2^n}$ à l'aide de seulement n multiplications à partir de $(1+\dfrac{1}{2^n})$.

b) Justifier que la convergence de (U_n) est géométrique et préciser son ordre.

c) Expliciter la suite (V_n) associée à (U_n) par le procédé du 3) et préciser son ordre de convergence.

Partie II : promenade autour d'une formule de calcul de π

Cette partie est consacrée à deux démonstrations de la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$

2. Oui, « ou presque » , c'est le style maths numériques à vous de faire un énoncé précis mais simple.
3. toujours le style maths numériques

1) **Une démonstration rapide de la formule :**

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. En remarquant que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k} dt$, démontrer que :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$$

2) **Une démonstration (plus longue) avec Taylor :**

a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, majorer $|S_n - \frac{\pi}{4}|$ en fonction de $\mathrm{Arctan}^{(n+1)}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Décomposer $\frac{1}{1+x^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

c) On note i le nombre complexe usuel. En admettant (ce n'est pas difficile) que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x-i)^k}\right) = \frac{-k}{(x-i)^{k+1}}$, en déduire une expression de $\arctan^{(n+1)}(x)$ à l'aide de i.

d) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|(x+i)^n - (x-i)^n| \leq 2(1+x^2)^{n/2}$.

e) Conclure à l'aide de ce qui précède que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$.

Partie III : accélération de la convergence vers π

1) **Application de la formule du II à la recherche de valeurs approchées de π :**

Avec la méthode et les notations du II 1), on a montré que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|S_n - \pi/4| \leq \frac{1}{2n+3}$. En notant maintenant $u_n = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, et en utilisant cette majoration, donner une C.S. sur n pour que $|u_n - \pi| < 10^{-6}$.

2) **Accélération de la convergence :**

On pose $v_n = u_{2n-1} + \frac{1}{8n}$ et $w_n = u_{2n-1} + \frac{1}{8n+1}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. Donner une C.S. sur n pour que $|4v_n - \pi| < 10^{-6}$.

3) **Une formule miraculeuse :** Démontrer que :

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}(\frac{1}{5}) - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{239}).$$

4) **Excursion utile : Un théorème pour les séries à signes alternés :**

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante, tendant vers 0. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Montrer que les deux suites (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes, ce qui donne en particulier que (A_n) converge et que, si on note ℓ sa somme, on a $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $A_{2n+1} \leq \ell \leq A_{2n}$.

5) **Application de la formule du 3) pour approcher π :**

On remarque (pas besoin de le démontrer) que les preuves faites au § II montrent plus généralement que $\forall\, x \in [0,1]$, $\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.

La formule du 3) ci-dessus s'écrit encore :

$$\pi = 16\,\mathrm{Arctan}(\frac{1}{5}) - 4\,\mathrm{Arctan}(\frac{1}{239}).$$

On note $S = 16\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} - \frac{4}{239}$, formule obtenue en remplaçant la série définissant $\arctan(\frac{1}{5})$ par sa somme partielle d'ordre 4 et celle définissant $\arctan(\frac{1}{239})$ par sa somme partielle d'ordre 0.

Démontrer que :

$$S - 3\times 10^{-8} < \pi < S + 10^{-7}$$

Ainsi S qui est une somme de six termes, dont le calcul est élémentaire, donne une meilleure approximation de π qu'avec un million de termes de la suite (u_n) du 1).