

Exercice 176:

a)

On sait, par Taylor-Lagrange, que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Or pour $N > n + 1$ fixé, $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k!} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} \sum_{k=n+2}^N \frac{(n+2)!}{k!}$, et on a:

$\sum_{k=n+2}^N \frac{(n+2)!}{k!} = 1 + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)\dots(N)} < \sum_{k=0}^{N-n-2} \frac{1}{n^k} = \frac{1 - \frac{1}{n^{N-n-1}}}{1 - \frac{1}{n}}$,
donc:

$$\sum_{k=n+2}^N \frac{(n+2)!}{k!} < \frac{n}{n-1}.$$

Donc on en déduit que $\sum_{k=n+2}^N \frac{(n+2)!}{k!} = O(1)$, et en réinjectant dans (*):

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + O\left(\frac{1}{(n+2)!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) \text{ car } \frac{1}{(n+2)!} = o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right).$$

Donc $\boxed{\varepsilon_n \sim \frac{1}{(n+1)!}}.$

b)

$$u_n = \sin(2\pi e n!) = \sin\left(2\pi n! \left(\varepsilon_n + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)\right) = \sin(2\pi n! \varepsilon_n + 2\pi n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}).$$

Or $n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est entier, et $\sin$ est 2π -périodique, donc:

$$u_n = \sin(2\pi n! \varepsilon_n)$$

Et $\varepsilon_n n! \sim \frac{1}{n+1}$ par a) tend vers 0, donc:

$$\sin(2\pi n! \varepsilon_n) \sim 2\pi n! \varepsilon_n \sim 2\pi n! \frac{1}{(n+1)!} \sim \frac{2\pi}{n}.$$

On a obtenu $\boxed{\sin(2\pi n! e) \sim \frac{2\pi}{n}}.$