chapitre 10 : l'approximation numérique de zéros de fonctions

Table des matières

1 Introduction au problème

1.1 Motivation : savoir ce que se cache derrière le `fsolve` :

On a déjà plusieurs fois utilisé la commande `fsolve` de `scipy.optimize` : `fsolve(f,x0)` cherche un zéro de `f` au voisinage d'un certain `x0`.

On a vu aussi que cette commande est parfois assez *sensible* au choix de la condition initiale `x0`. Par exemple pour résoudre l'équation $\tan(x) = x$ (cf. TP).

Ce qui suit va nous expliquer ce qui est caché derrière `fsolve` et le pourquoi de ces phénomènes de sensibilité au choix de `x0`.

Remarque préliminaire importante : l'étude numérique des zéros d'une fonction commence déjà par l'étude des variations. On essaie (si possible !) de se placer sur un intervalle I sur lequel $f_{|I}$ est strictement monotone et change de signe, pour être sûr de l'existence et l'unicité du zéro que l'on cherche à approcher. La représentation graphique y aide bien sûr !

1.2 La méthode déjà connue : dichotomie

Revoir le T.P. 5

1.2.1 Entrées et sorties de cette méthode

- Données : $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (quitte à remplacer f par $-f$).
- Algo. : fabrique des suites (a_n) et (b_n) telles que $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$ et $b_n - a_n = (b-a)/2^n$.
- Conséquence théorique : la limite commune à ces deux suites adjacentes donne un zéro r de f, ce qui démontre le T.V.I.
- Conséquence pratique : en s'arrêtant à une étape n, les nombres $a_n$et b_n fournissent un encadrement d'un zéro de f à $(b-a)/2^n$ près.

1.2.2 Les avantages de cette méthode, et ce qu'on peut espérer de mieux

- Avantages :
  — elle s'applique à n'importe quelle fonction continue (hyp. de régularité très faible sur f),
  — elle converge *toujours* vers un zéro,
  — la convergence est *géométrique* : en $O(\dfrac{1}{2^n})$.
- Ce qu'on peut espérer de mieux : on remarque que le processus de dichotomie est indépendant de la forme de la fonction f. On peut espérer que :

  pour des bonnes fonctions f (plus régulières, par exemple $\mathcal{C}^2$), on va trouver des méthodes qui vont plus vite en tenant mieux compte des propriétés de f.
  En revanche, ces méthodes ne convergeront pas forcément... donc plus vite mais moins sûr...

- **Un autre problème :** Quand on étudie des fonctions des fonctions de plusieurs variables, disons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la dichotomie n'aura plus de sens, il faudra bien d'autres méthodes. Il se trouve qu'on celles qu'on va développer ici se généraliseront aussi à ce cadre-là. On verra ci-dessous déjà un exemple avec $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pour trouver des zéros de fonctions polynomiales dans $\mathbb{C}$: la dichotomie n'a plus de sens.

1.3 Introduction aux méthodes itératives

1.3.1 L'idée de base : remplacer les zéros par des points fixes

On connaît bien le fait suivant :

Pour g *continue*, si une suite (u_n), définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, converge, alors sa limite est un point fixe de g.

Moralité :

Numériquement, les points fixes d'une fonction g s'approchent en itérant des suites $u_{n+1} = g(u_n)$, *pourvu que ces suites convergent.* On parle d'approche *itérative.*

Principe des méthodes itératives

Pour résoudre une équation $f(x) = 0$, on la remplace par une équation équivalente $g(x) = x$, en choisissant g de sorte que, pour u_0 dans le voisinage du zéro pressenti :
• les suites (u_n) définies par $u_{n+1} = g(u_n)$ convergent effectivement,
• et cette convergence soit rapide.

L'idée la plus évidente pour la fonction g

Bien sûr $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = x$, et donc on peut considérer $g(x) = f(x) + x$ et les suites $u_{n+1} = g(u_n)$ associées. Le problème est que ces suites ne convergent pas forcément, comme on va le revoir après le petit rappel suivant.

1.3.2 Ce qu'on sait déjà sur la convergence vers les points fixes

a) **Si g est k-lipschitzienne sur $I = [a, b]$ avec $k < 1$ et I est stable par g alors :** la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$...

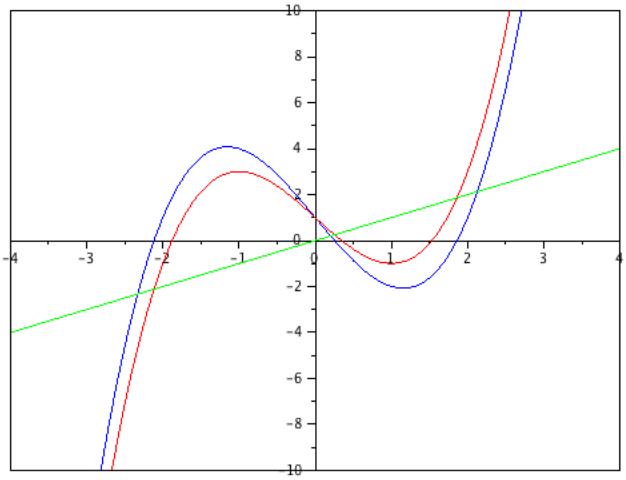
b) Caract. commode : **Pour $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, on sait que g est k-lip. sur I ssi**

c) **Pour $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ un point fixe $a \in I$ de g est dit *attractif* ssi $|g'(a)| < 1$.** Dans ce cas, il existe un voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ de a surlequel g est k-lip. avec $k < 1$ et si $u_0 \in V$ ...

d) **Avec les notations du d), a est dit répulsif ssi $|g'(a)| > 1$.** Dans ce cas, la seule possibilité pour que (u_n) converge vers a est que (u_n) soit constante égale à a APCR.

1.3.3 Ce que donne l'exemple naïf de $g(x) = f(x) + x$

Imaginons qu'on veuille résoudre une équation du troisième degré $f(x) = 0$ où $f(x) = x^3 - 4x + 1$. L'idée naïve de chercher les points fixes de $g(x) = f(x) + x$ nous donne la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ dont le graphe est en rouge, celui de f est en bleu.



Mauvaise nouvelle : deux points fixes de g sont clairement répulsifs.

Dans le § 2 suivant, nous allons construire une fonction g très efficace, grâce à la *méthode de Newton.*

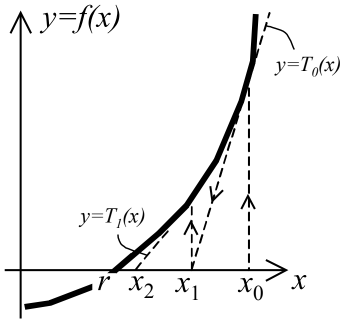
2 La méthode de Newton pour l'approximation des zéros de fonction

2.1 Présentation de la méthode

Hypothèse : On se donne une fonction f dérivable sur un intervalle I contenant une racine r de l'équation $f(r) = 0$. On fixe un $x_0 \in I$ pas trop loin du zéro que l'on cherche.

2.1.1 Idée géométrique de la méthode

On considère la tangente $T_{x_0}\Gamma_f$ au graphe de f au point d'abscisse x_0. Si celle-ci coupe l'axe, on note x_1 l'abscisse de ce point d'intersection dont on espère qu'il est plus proche de r. On recommence alors cette construction à partir du point $(x_1, f(x_1))$. On espère que cela définit une suite (x_n) et qu'elle converge vers r.



2.1.2 Traduction algébrique

A l'étape n, l'équation de la tangente au point $M_n = (x_n, f(x_n))$ est :

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

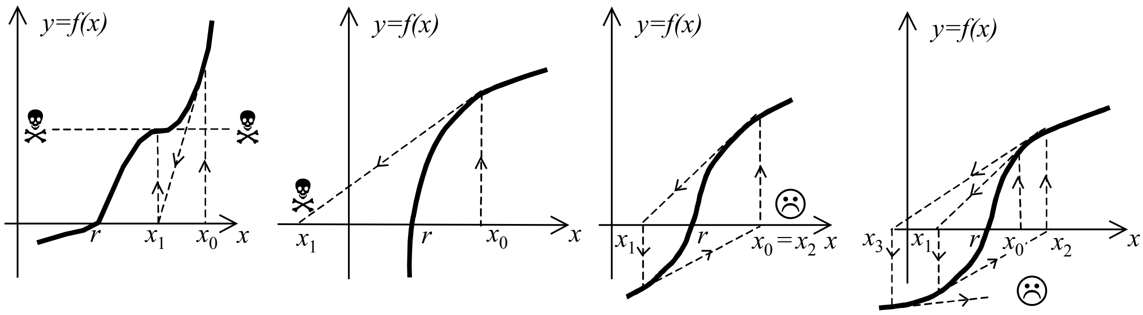
Donc le point x_{n+1} s'il existe est solution de l'équation :

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

ce qui équivaut, en supposant bien sûr que $f'(x_n) \neq 0$, à :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.}$$

2.2 Des exemples où la méthode ne va pas marcher



• L'écueil de la figure 1 correspond à un point où f' s'annule : tangente horizontale, la suite n'est plus définie, cela se voyait déjà au 2.1.2

• Même si f' ne s'annule pas, et donc, dans le cas des figure où f est croissante, $f' > 0$, la figure 2 montre que x_1 peut sortir de l'ensemble de définition de f. La fonction f de cette figure est concave.

• Les figures 3 et 4 montrent une fonction avec un point d'inflexion et où la suite (x_n) ne converge pas.

2.3 Résultat global pour le cas part. des fonctions monotones, ne changeant pas de convexité/concavité

Hypothèses : on suppose que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ vérifie les conditions suivantes :

- f' ne s'annule pas sur $[a,b]$, donc f est strictement monotone sur $[a,b]$.
- $f(a).f(b) < 0$ de sorte que f admet un unique zéro α dans $[a,b]$.
- f'' garde un signe constant sur $[a,b]$.

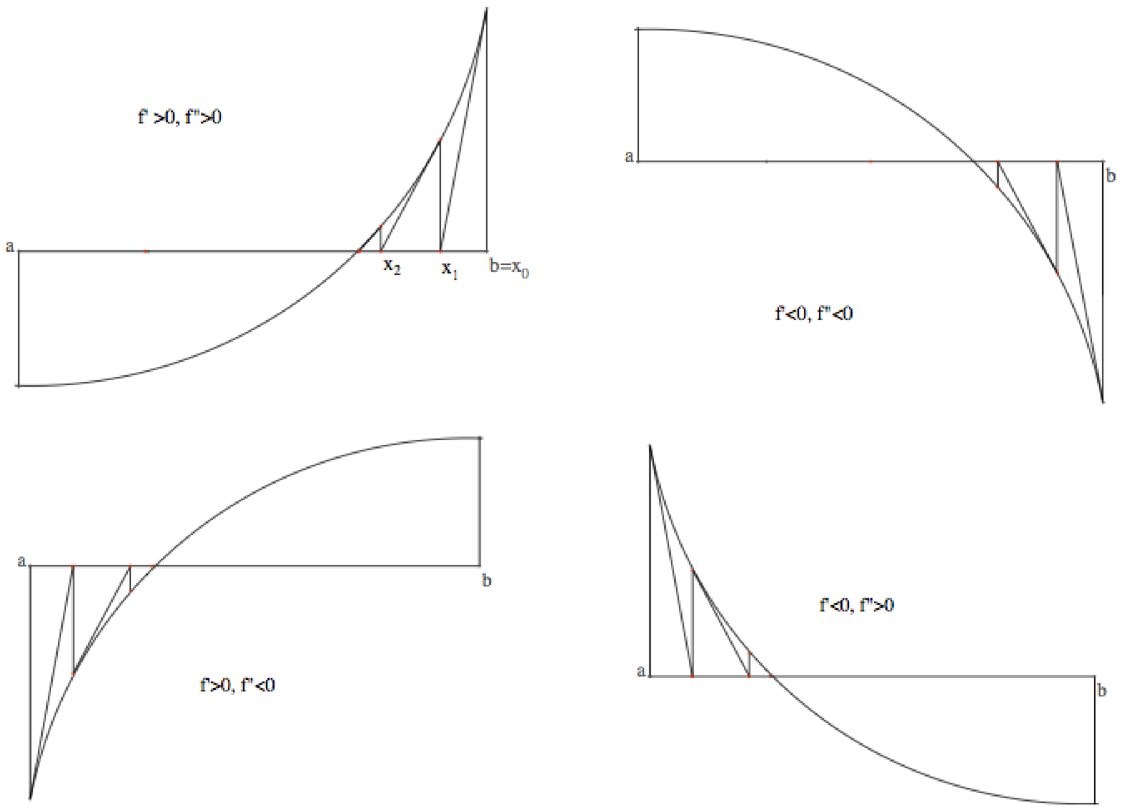
Remarque : on notera que ces hypothèses peuvent toujours être réalisées en restreignant suffisamment l'intervalle $[a,b]$ autour de α sauf si $f'(\alpha) = 0$ (point critique) ou $f''(\alpha) = 0$ (point d'inflexion par exemple).

Propriété : Avec les hypothèses précédentes, si on fixe un $x_0 \in [a,b]$ tel que :

$$f(x_0).f''(x_0) > 0 \quad \text{(règle de Fourier)}$$

alors :
a) La suite (x_n) définie par ce x_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et est monotone.
b) Cette suite (x_n) converge vers l'unique zéro de f sur $[a,b]$.

Illustration :



Remarque pour la preuve : il suffit de démontrer la propriété dans le cas $f' > 0$ et $f'' \geq 0$ quitte à remplacer sinon l'équation par $f_1(x) = 0$ (resp. $f_2(x) = 0$, resp. $f_3(x) = 0$) où $f_1(x) = -f(-x)$ (resp. $f_2(x) = f(-x)$, resp. $f_3(x) = -f(x)$).

2.4 Etude de l'attractivité du point fixe dans la méthode de Newton

Vu le résultat obtenu au § 2.3, au moins dans ce cas, on est sûr que le point fixe n'est pas répulsif. On va voir qu'on a en fait un résultat très fort :

2.4.1 Une propriété générale de la méthode de Newton

Exercice : On se donne $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ avec r un zéro de f dans I telle que f' ne s'annule pas sur I, et on note $\forall\, x \in I$, $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Calculer $\varphi'(r)$.

Définition : Un point fixe r d'une application φ tel que $\varphi'(r) = 0$ est appelé *point fixe superattractif.*

On vient de démontrer la :

> **Propriété** La méthode de Newton transforme toujours un zéro de f en un point fixe *superattractif* de $\varphi : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

2.4.2 Propriété générale qui justifie le mot *superattractif*

Bien sûr un point fixe r superattractif est en particulier attractif et comme $|\varphi'(r)| \leq k$ pour tout k, la convergence des suites associées $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ est en $O(k^n)$ pour tout k (et donc aussi en $o(k^n)$ pour tout k). Beaucoup mieux, cette notion donne encore au saut de rapidité, comme on le démontre dans la prop. suivante :

> **Propriété :** Soit $\varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ quelconque ayant un point fixe r *superattractif* i.e. tel que $\varphi'(r) = 0$. On note $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |\varphi''|$. Alors :
>
> **(C1)** $\forall\, x \in I$, $|\varphi(x) - r| \leq \dfrac{M_2}{2}|x - r|^2$,
>
> **(C2)** On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
>
> $$|x_n - r| \leq \frac{2}{M_2}\left[\frac{M_2}{2}|x_0 - r|\right]^{2^n}$$
>
> **(C3)** Si on choisit x_0 pour que $\dfrac{M_2}{2}|x_0 - r| < 1$, alors la suite définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers r en $O(k^{2^n})$ où $k = \dfrac{M_2}{2}|x_0 - r|$. On dit que la convergence est *supergéométrique.*

Exercice : *prouver cette propriété.*

Illustration numérique : Si on choisit x_0 pour $|x_0 - r| < \dfrac{1}{5M_2}$ alors $k = \dfrac{M_2}{2}|x_0 - r| \leq \dfrac{1}{10}$ et la **(C2)** ci-dessus donne que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |x_n - r| \leq \frac{2}{M_2}(\frac{1}{10})^{2^p}.$$

Le nombre de décimales en approximant r par x_n double à chaque étape : en laissant de côté la constante $2/M$, avec 10 itérations on a une approximation à $10^{-2^{10}} = 10^{-1024}$ près, donc plus de mille décimales exactes [1]

2.5 Conséquence des résultats § 2.4 : convergence locale

On obtient immédiatement le :

1. bon bien sûr il ne faut pas travailler sur les flottants... sinon cela n'a pas de sens, mais pour les flottants la précisions maximale est donc atteintes en 3 ou 4 itérations...

Thm. de convergence locale : Soit $f \in \mathcal{C}^3(I,\mathbb{R})$ ayant un zéro r dans I telle que f' ne s'annule pas sur un voisinage V de r dans I. Il existe un voisinage $W \subset V$ de r tel que si $x_0 \in W$, la méthode de Newton appliquée à f à partir du point x_0 converge super-géométriquement vers x_0.

Remarque 1 : Ce théorème s'applique même si r est un *point d'inflexion* de f, puisque les preuves du § 2.4 n'utilisent pas le signe de f''.

Remarque 2 : L'hyp. $\mathcal{C}^3$ est purement technique, pour que φ soit $\mathcal{C}^2$ et que la preuve faite plus haut s'applique. En travaillant un peu plus, on peut diminuer cette hypothèse de régularité, mais ce n'est pas crucial ici pour nous

Remarque 3 : Un problème crucial pour l'analyse numérique est de savoir comment être sûr de tomber dans le bon voisinage W ! Et ce n'est pas si simple, on verra des exemples en T.P. Un autre problème intéressant est celui du test d'arrêt qu'on va prendre, on va l'étudier dans les exemples ci-dessous.

3 Exemples concrets et fondamentaux

On va donner d'abord deux exemples très simples mais fondamentaux de calcul par la méthode de Newton :

nous allons voir ce qui se cache derrière les touches ÷ et $\sqrt{\ }$ de vos calculatrices (et ordinateurs).

3.1 Méthode de Newton pour le calcul de l'inverse d'un nombre

On considère un nombre $a \neq 0$.

On aimerait un algorithme qui calcule $1/a$ seulement en faisant des additions et multiplications !

On cherche $1/a$ comme l'unique zéro de $f : x \mapsto \frac{1}{x} - a$. A priori la définition de f fait intervenir un inverse, mais si on calcule $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, alors $\varphi(x) = 2x - ax^2$.

Ainsi la méthode de Newton associée à cette fonction f définit la relation de récurrence simple :

$$\boxed{x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2.}$$

Remarque sur la notion de schéma numérique : si au lieu de la fonction f ci-dessus, on avait pris $f : x \mapsto ax - 1$, la méthode de Newton nous ne donnait rien d'intéressant puisqu'elle obligeait à calculer un inverse. Ce n'était pas un bon schéma numérique pour notre problème.

a) Justification de la convergence : pour quels x_0 ?

Vu le graphe de f, on sait que pour appliquer le résultat du § 2.3, on suffit de prendre x_0

On sait alors que (x_n) tend vers $1/a$ en

b) Etude de la vitesse de convergence :

Ici si on pose $\varepsilon_n = \dfrac{1}{a} - x_n$, alors $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{1}{a} - (2x_n - ax_n^2) = a(\dfrac{1}{a^2} - 2\dfrac{x_n}{a} + x_n^2) = a(\dfrac{1}{a} - x_n)^2$

Ainsi :

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = a\varepsilon_n^2}$$

Ainsi, ici, on a de manière globale un *égalité* qui ressemble à l'inégalité obtenue avec l'I.T.Lagrange au § 2.4.2.

On en déduit immédiatement par récurrence que :

$$\boxed{\varepsilon_n = a^{2^n-1}\varepsilon_0^{2^n}}$$

On peut réécrire cette expression sous la forme :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{a}(a\varepsilon_0)^{2^n} \text{ ou encore : } (a\varepsilon_n) = (a\varepsilon_0)^{2^n}.$$

Comme $a\varepsilon_0 = a(\frac{1}{a} - x_0) = 1 - ax_0$ et qu'on a choisi $x_0 < 1/a$, on a $a\varepsilon_0 \in]0,1[$ donc on retrouve la convergence pour toutes valeurs initiales x_0 telles que $x_0 < 1/a$ mais surtout, on vient de démontrer que :

Pour tout $x_0 < \frac{1}{a}$, la suite $a(\frac{1}{a} - x_0)$ est une vraie suite *supergéométrique* dès le rang 0. La convergence est donc *très rapide*.

c) Illustration numérique

```
def g(x,a):
    return 2*x-a*x**2

def approxinv(a,x0,n):
    if a*x0>1:
         raise ValueError("x0 doit être plus petit")
    for i in range(n):
        x0=g(x0,a)
    return x0
# test
print(approxinv(5,0.1,4))
print(approxinv(5,0.1,5))
print(approxinv(5,0.1,6))
```

donne comme valeurs de retour :

```
0.1999969482421875
0.19999999995343387
0.2
```

d) Le problème du test d'arrêt :

• ici nous connaissons avec exactitude l'erreur, $\varepsilon_n = \frac{1}{a}(1 - ax_0)^{2^n}$, on pourrait pour un $\epsilon > 0$ donné, calculer le nombre n de pas pour que $\varepsilon_n < \varepsilon$. Mais cela reviendrait à calculer en prenant un logarithme ! C'est un contresens par rapport au simple inverse de a qu'on veut calculer !

• il y a beaucoup mieux à faire : on rappelle que la suite (x_n) converge en croissant vers $1/a$. On est donc sûr que x_n donne une valeur approchée de $1/a$ (toujours par défaut) à ε près lorsque $x_n \leq 1/a \leq x_n + \varepsilon$, ce qui ce détecte facilement grâce à la fonction décroissante $f : x \mapsto \frac{1}{x} - a$:

$$\boxed{\text{il suffit que } f(x_n + \varepsilon) < 0.}$$

Bien sûr, on ne veut pas calculer $f(x) = 1/x - a$ mais il est facile de chasser les dénominateurs $f(x) < 0 \Leftrightarrow ax > 1$.

Donc la bonne condition d'arrêt est ici : $a(x_n + \varepsilon) > 1$.

e) Le code avec ce test d'arrêt ?

f) Comment les machines choisissent-elles les x_0 ? Apparemment à l'aide de *tableaux* en mémoire que l'on compare aux premiers bits de a.

3.2 Méthode de Newton pour le calcul des racines carrées

On fixe un $a > 0$ et on cherche les zéros de $f\ :\ x \mapsto x^2 - a$. Ce sont bien sûr $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

a) La suite récurrente définie par la méthode de Newton pour f ? Une vieille amie

b) Résultat global de convergence :

Ainsi, ici on *sait* que pour *tout* $x_0 > 0$ la méthode de Newton converge vers $\sqrt{a}$.

C'est une différence avec la méthode du § 3.1 précédent où, pour $x_0 > 1/a$, on tombe sur des nombres négatifs !

Ici quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$ on a $x_1 \geq \sqrt{a}$ et ensuite la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ décroit et converge vers $\sqrt{a}$.

c) Le test d'arrêt ici : Cette fois encore, *la monotonie* de (x_n) donne un test facile.

Comme au § 3.1, il suffit cette fois de tester si $f(x_n - \varepsilon) < 0$.

4 Le problème du test d'arrêt en général ?

a) Dans le cas des suites monotones : on a vu que le test était facile.

En fait, la situation du § 2.3 se réalise localement sauf au voisinage d'un point critique ou d'un point d'inflexion. Donc, sauf dans ces cas, on sait que la suite serait monotone à partir d'un certain rang.

Cependant, l'usage est plutôt de prendre des tests d'arrêts *moins précis* mais *plus faciles* à coder, qui peuvent être les deux suivants :

b) Test par la taille des valeurs de f : boucle `while` avec la condition `abs(f(x))>epsilon`

Bien sûr, cela ne donne pas de contrôle précis de la valeur de l'approximation.

c) Test par la différence entre deux valeurs successives $x_{n+1} - x_n$: boucle `while` avec la condition `abs(xp-xn)>epsilon` où `xp` (resp. `xn`) est la valeur précédente de `x` et `xn` la suivante.

Attention, il n'est pas clair que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ soit forcément décroissante, même si on l'espère.

Souvent on prend plutôt l'écart *relatif* `(xp-xn)/xp`.

5 Exemples explicites où la méthode de Newton diverge (en T.P. ?)

Pour $x^3 - x + 3 = 0$ en partant de $x_0 = 0$ on a un comportement cyclique.

Pour $xe^{-x} = 0$, en partant de $x_0 = 2$, on a divergence vers l'infini.

Pour $\arctan(x) = 0$ en partant de $x_0 = 1$.

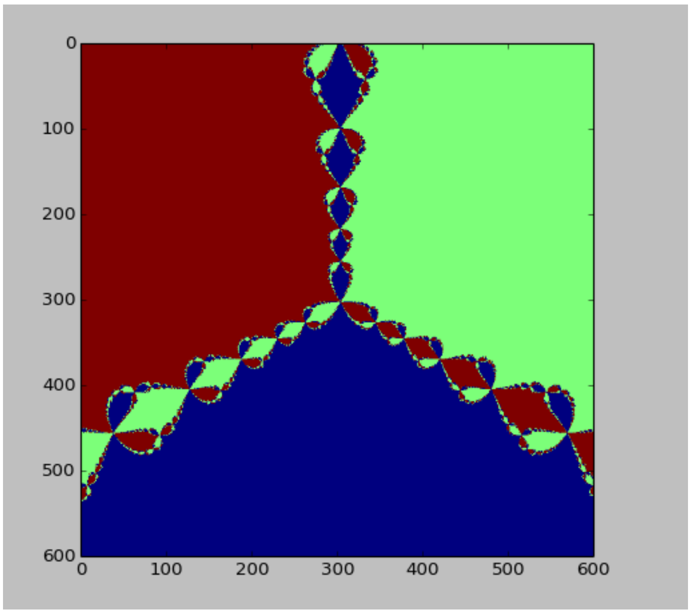
6 La méthode de Newton va dans $\mathbb{C}$

Soit $f\ :\ \mathbb{C}\ \to \mathbb{C}$ une fonction telle qu'on puisse définir la *dérivée au sens complexe* en tout point : $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

C'est notamment le cas si f est une fonction *polynomiale* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

On admet ici que la même formule $z_{n+1} = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ donne des suites qui convergent vers les zéros de f.

On l'illustre ici pour l'étude des *bassins d'attractions* par cette méthode des trois racines cubiques de l'unité.


0
100
200
300
400
500
600
0
100
200
300
400
500
600