Mardi 4 Juin 2019

Concours Blanc MPSI Daudet/Joffre : Analyse 2h

Dans ce problème, on s'intéresse essentiellement à la *dynamique* des fonctions $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + c$, suivant la valeur du réel c.

Cela signifie que pour chaque valeur de $x_0 \in \mathbb{R}$, on va étudier le comportement de la suite (x_n) de premier terme ce x_0 et vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n^2 + c$.

Le comportement de la suite (x_n), qui est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, va donc dépendre bien sûr du choix de x_0 (appelé *germe de la suite*) et de la valeur de c.

1) **Cas où $c = 0$, $f_c = f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.** On suppose $c = 0$.

   a) Ecrire explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n en fonction de x_0.

   b) Préciser alors la limite de la suite (x_n) suivant la valeur de x_0.

2) **Détermination des points fixes de f_c :**
   Un réel $x \in \mathbb{R}$ est appelé un *point fixe* de f_c si, et seulement si, $f_c(x) = x$.
   Montrer que, suivant la valeur de c, la fonction f_c admet $2, 1$ ou 0 points fixes, qu'on explicitera et qu'on notera (s'ils existent) : $\alpha_c \leq \beta_c$.

3) **Etude du cas $c > 1/4$:**
   On suppose $c > 1/4$. Montrer que pour tout choix de $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite (x_n) est croissante, puis que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4) **Etude partielle du cas $c \leq 1/4$:** on suppose $c \leq 1/4$ et on note $\alpha_c \leq \beta_c$ les deux points fixes de f_c trouvés ci-dessus (confondus si $c = 1/4$).

   a) Montrer que si $x_0 > \beta_c$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   b) Etudier ensuite le cas $x_0 < -\beta_c$.

5) **Etude du cas critique $c = 1/4$, vitesses de convergence/divergence :**
   On suppose donc $c = 1/4$.

   a) Montrer que (x_n) converge si, et seulement si, $x_0 \in [-1/2, 1/2]$

   b) Pour étudier la vitesse de convergence/divergence, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n - 1/2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

   c) **Vitesse de convergence :**
   On suppose que $u_0 \in]-1, 0[$. On sait donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (i) Montrer que $(v_n) = \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers une limite finie non nulle que l'on précisera.

   (ii) Démontrer le théorème de Cesaro suivant : si $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et si on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{v_1 + \cdots + v_n}{n}$ alors $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

   (iii) En déduire un équivalent simple de (u_n) pour $n \to +\infty$.

   d) **Vitesse de divergence dans le cas $u_0 \notin [-1, 0]$:**
   On suppose que $u_0 \notin [-1, 0]$. On sait donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   On note $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{2^n} \ln(u_n)$ (cette suite est bien définie car $\forall\, n \geq 1$, $u_n > 0$.)

   (i) Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

   (ii) En déduire que la suite (w_n) converge. On note ℓ sa limite dans la suite.

   (iii) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $w_{n+p+1} - w_n \leq \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

(iv) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n(\ell - w_n) = 0$ puis qu'il existe un réel $c > 1$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c^{2^n}$.

6) **Propriétés générales des points fixes attractifs :**

Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction quelconque. Un point fixe x de g est dit *attractif* si, et seulement si, $|g'(x)| < 1$.

Pour chaque valeur de $x_0 \in \mathbb{R}$, on note encore (x_n) la suite récurrente définie par cette valeur de x_0 et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

a) Montrer que si un point fixe ℓ de g est attractif, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, la suite récurrente (x_n) définie par ce x_0 converge vers ℓ.

b) Si ℓ est un point fixe attractif de g, on appelle *bassin d'attraction* de ℓ l'ensemble $\mathcal{B}_\ell$ formé par toutes les valeurs de x_0 pour lesquelles la suite (x_n) converge vers ℓ.

$$\mathcal{B}_\ell = \{x_0 \in \mathbb{R} |\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\}$$

On appelle I_ℓ la réunion de tous les intervalles contenant ℓ inclus dans $\mathcal{B}_\ell$.

On *admet* que I_ℓ est un intervalle ouvert non vide $]a,b[$ avec $a < b$ (cela se déduit du a)).

Montrer les inclusions $g(]a,b[) \subset]a,b[$ et $g(\{a,b\}) \subset \{a,b\}$.

c) On suppose en outre que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

(i) Montrer que la dérivée de $h = g \circ g$ ne s'annule pas sur $]a,b[$ et que $h(a) = a$ et $h(b) = b$.

(ii) En déduire qu'il existe un $a' \in]a,\ell[$ et un $b' \in]\ell,b[$ tels que :

$$h'(a') = 1 \quad \text{et} \quad h'(b') = 1$$

7) **Généralisations : points périodiques attractifs**

On note $f^{\circ n}$ l'itérée n-fois de f définie comme suit :

$$f^{\circ 0} = \mathrm{id} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{\circ(n+1)} = f \circ f^{\circ n}.$$

On dira qu'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est *point périodique* de f s'il existe un entier $q > 0$ tel que $f^{\circ q}(x_0) = x_0$. On appellera *période* de x_0 le plus petit entier $q > 0$ vérifiant cette propriété et orbite de x_0 l'ensemble $\mathcal{O}(x_0, f) = \{f^{\circ k}(x_0),$ pour $k = 0, 1, \ldots, q-1\}$.

Pour un point x_0 périodique de période q, on dira qu'il est *attractif* ssi $|(f^{\circ q})'(x_0)| < 1$.

a) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (f^{\circ n})'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^{\circ i}(x)).$$

b) **Remarque : (pas de question)** avec la propriété précédente, on peut en déduire (non demandé) que si x_0 est périodique de période q et attractif alors pour tout $x \in \mathcal{O}(x_0, f)$, le point x est aussi périodique de période q et attractif avec $|(f^{\circ q})'(x)| = |(f^{\circ q})'(x_0)|$.

8) **Retour aux fonctions $f_c : x \mapsto x^2 + c$.**

a) Déterminer une C.N.S. sur c pour que le point fixe α_c soit attractif.

b) On admet ici que les considérations de la question 6 appliquées à $g = f_c^{\circ q}$ permettent [1] de montrer le :

Théorème admis si f_c admet un point périodique attractif de période q, qu'on note x_0, alors la suite $(f_c^{\circ qn}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point x de l'orbite de x_0.

Question : Déduire de ce théorème que si $c < -2$, f_c n'a pas de point périodique attractif.

Indication – On pourra comparer $f_c(0)$ et $-\beta_c$.

Epilogue : pour $c \in [-2, 1/4]$ la situation est très riche mais le théorème ci-dessus permet de montrer qu'il n'y a à chaque fois qu'au plus *une* orbite périodique attractive, qu'on détecte avec le germe 0.

---

1. avec d'autres ingrédients qui demanderaient un sujet de 4h