

MATHÉMATIQUES D.S. 8 : SOLUTIONS

I 1) a) (Ex. planche). (i) D'un côté $AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ la colonne non nulle étant

la colonne j .

De l'autre côté $E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{j,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$ la ligne non nulle étant la ligne i .

Pour justifier ce calcul, on peut détailler avec la formule du produit de matrices, ou bien écrire $A =$

$$\sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l} \text{ et } AE_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} \delta_{l,i} E_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{C}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. En particulier $AE_{i,j} = E_{i,j}A$.

L'égalité des entrées (j, i) des deux matrices, calculées au a), donne $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Ceci étant vrai pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on en déduit déjà que $a_{1,1} = \dots = a_{n,n}$.

D'autre part si $k \neq j$, l'entrée (i, k) de $E_{i,j}A$ vaut $a_{j,k}$ et l'entrée (i, k) de $AE_{i,j}$ vaut 0.

Donc pour tout $k \neq j$, $a_{j,k} = 0$. Ceci étant vrai pour tous les $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on conclut bien :

toutes les entrées non diagonales de A sont nulles.

Ainsi, A est nécessairement de la forme λI_n .

Réciproquement, on sait que toutes si $A = \lambda I_n$ alors A commute avec toutes les matrices M .

Donc $\mathcal{C} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

b) (i) Ex. planche : on a montré plus généralement que pour tout rang $r \geq 1$ il existe une base de $M_n(\mathbb{K})$ formée de matrices de rang un. Ici on nous demande seulement le rang $r = n$.

Or on peut écrire $E_{1,1} = \text{diag}(2, 1, \dots, 1) - I_n = M + N$ avec $M = \text{diag}(2, 1, \dots, 1)$ et $N = -I$ qui sont toutes les deux inversibles (si dans $\mathbb{K}$, $2 \neq 0$, exercice que faire si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?)

Par théorème de réduction par équivalence, chaque matrice $E_{i,j}$ s'écrit sous la forme $E_{i,j} = PE_{1,1}Q$ avec (P, Q) inversibles (qui dépendent bien sûr de $E_{i,j}$).

Donc $E_{i,j} = P(M + N)Q = PMQ + PNQ = M_1 + N_1$ avec M_1 et N_1 inversibles.

Remarque : on peut aussi faire plus élémentaire et ne pas utiliser le théorème de réduction par équivalence et donner une forme explicite pour tous les $E_{i,j}$. En effet pour les $E_{i,i}$ il suffit de prendre $\text{diag}(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)$ avec le 2 à la i -ième entrée. Pour les $E_{i,j}$ avec $i \neq j$, on peut prendre $E_{i,j} = (I + E_{i,j}) - I$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{C}(GL_n(\mathbb{K}))$. Comme A commute à toutes les matrices inversibles, par bilinéarité du produit A commute aussi aux sommes de matrices inversibles, et donc par (i), aux matrices $E_{i,j}$.

Par a) on conclut alors que A est de la forme λI_n .

La réciproque est immédiate puisque les matrices de la forme λI_n commutent à toutes les matrices.

I 2) a) Ex. pl. Soit A de rang un qu'on écrit en colonne $A = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]$.

Comme A est de rang un, il existe une colonne C telle que pour tout $i = 1, \dots, n$, $C_i = \lambda_i C$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Alors en posant $L = [\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n]$ on a $CL = [\lambda_1 C \ \dots \ \lambda_n C] = A$.

b) Avec le a), $A^2 = CLCL$. Or en notant $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, on a $LC = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$.

Or par $A = CL$, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = \lambda_j c_i$.

Donc $LC = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \text{Tr}(A)$.

Ainsi $A^2 = CLCL = C \text{Tr}(A) L = \text{Tr}(A) CL = \text{Tr}(A) A$.

Remarque : on peut aussi remarquer que la preuve du cours, faite pour A, B matrices carrées, du fait que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ s'applique aussi à des matrices A et B non carrées dont les produit AB et BA sont carrés. Alors $\text{Tr}(CL) = \text{Tr}(LC) = LC$.

c) Par exemple (vue pl.) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2. En augmentant la taille des matrices

on peut avoir des matrices nilpotentes d'indice 2 et de rang aussi grand qu'on veut, par exemple en taille $2n$ des matrices A telles que $\ker(A) = \text{Im}(A)$ soit de dimension n .

d) **Bonus** (donné à Timothy en colle) : (i) montrer que si $\lambda \neq 0$ et $A^2 = \lambda A$ autrement dit $A(A - \lambda I) = 0$ alors $\ker(A) \oplus \ker(A - \lambda I) = E$.

Indication – Raisonner par analyse synthèse.

(ii) Dédurre du (i) que si $\text{Tr}(A) \neq 0$ et si $A^2 = \text{Tr}(A) \cdot A$ alors A est de rang 1.

3) a) (i) Construction de la base : Soit e_1 tel que $F_1 = \text{Vect}(e_1)$. On complète (e_1) en une base (e_1, e_2) de F_2 .

Par récurrence finie : si $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et si on a déjà construit $(e_1, \dots, e_i)$ tel que pour tout $k \leq i$, $(e_1, \dots, e_k)$ soit une base de F_k , on complète $(e_1, \dots, e_i)$ en une base $(e_1, \dots, e_{i+1})$ de F_{i+1} .

Ainsi par récurrence, on construit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de F_k .

(ii) Alors pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$; $u(e_j) \in F_j$ donc $u(e_j) = \sum_{i=1}^j a_{i,j} e_i$

Mais cela dit que la matrice A de u est exactement la matrice des $a_{i,j}$ avec $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ ce qui signifie bien que A est T.S.S.

b) Beaucoup de méthode vues en cours :

- une consiste à voir que $TS_n(\mathbb{K})$ est une algèbre et à montrer cette propriété pour toutes sous-algèbres de $M_n(\mathbb{K})$ (ce qu'on a fait de deux façons différentes).

- une autre consiste simplement à écrire l'inversion d'un système triangulaire

- Ici une nouvelle, dans le contexte de cet exercice.

On a montré au a) que si u stabilise un drapeau complet $(F_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} = (\text{Vect}(e_1, \dots, e_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire. Mais la réciproque est vraie aussi (reprenre les expressions du a) pour le voir).

Mais alors si T est une matrice triangulaire et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est l'endo. associé dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si T est inversible, on a avec $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, $u(F_i) \subset F_i$ et comme u est bijectif, $\dim u(F_i) = \dim F_i$ donc $u(F_i) = F_i$.

Mais alors en appliquant u^{-1} , on a aussi $u^{-1}(F_i) = F_i$ et donc u^{-1} stabilise le même drapeau, et donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})$ est aussi T.S., donc T^{-1} est aussi T.S.

c) On considère l'orthonormalisation de Gram-Schmidt de $\mathcal{B}$, qu'on note $\mathcal{B}'$. (M1) Par déf. de cette orthonormalisation la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est T.S. car Gram-Schmidt respecte exactement la condition du a).

Mais alors par b) P^{-1} est aussi T.S. Et donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$ est produit de trois matrices T.S. donc T.S. $\square$

(M2) Plus géométrique : on remarque qu'au a), on a en fait l'équivalence entre les deux prop. suivantes pour une base $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$

- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est T.S.

- Le drapeau complet $(\text{Vect}(e_1, \dots, e_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est stable par u .

Avec ces conditions, comme le drapeau engendré par la base $\mathcal{B}'$ obtenue par Gram-Schmidt à partir de la base $\mathcal{B}$ est le même que celui de la base $\mathcal{B}$, le fait que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit T.S. entraîne que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est aussi T.S.

d) (i) Construction de la base : Soit $d_i = \dim V_i$.

Soit $(e_1, \dots, e_{d_1})$ une base de V_1 . On la complète en $(e_1, \dots, e_{d_2})$ une base de V_2 .

Par récurrence finie, si $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, on suppose qu'on a construit une base $(e_1, \dots, e_{d_i})$ de V_i telle que pour tout $k \leq i$, $(e_1, \dots, e_{d_k})$ est une base de V_k . On complète alors $(e_1, \dots, e_{d_i})$ en une base $(e_1, \dots, e_{d_{i+1}})$ de V_{i+1} .

Ainsi par récurrence finie, on a une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{d_r}) = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(e_1, \dots, e_{d_k})$ soit une base de V_k .

(ii) Considérons alors la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$.

Par déf. $v(e_j) = 0$ si $j \leq d_1$ et ensuite pour tout $j > d_1$, si $j \in]d_k, d_{k+1}]$, on sait que $u(e_j) = \sum_{i=1}^{d_k} a_{i,j} e_i =$

$\sum_{i=1}^n a_{i,k} e_j$ en posant $a_{i,k} = 0$ si $i > d_k$.

Mais ceci montre que la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ a en particulier toutes ses entrées $a_{i,j}$ avec $i \geq j$ nulles, donc A est bien triangulaire supérieure stricte.

4) a) Vu en exercice pl. : dès que la suite des noyaux fait une pause elle s'arrête définitivement.

Lemme : si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\ker u^k = \ker u^{k+1}$ alors $\ker u^{k+1} = \ker u^{k+2}$.

Preuve du lemme : On suppose donc $\ker u^k = \ker u^{k+1}$. On a toujours l'inclusion $\ker u^{k+1} \subset \ker u^{k+2}$.

Réciproquement, soit $x \in \ker u^{k+2}$. On a $u^{k+2}(x) = 0$ donc $u^{k+1}(u(x)) = 0$.

Donc $u(x) \in \ker u^{k+1}$. Or $\ker u^{k+1} = \ker u^k$ donc $u(x) \in \ker u^k$ donc $u^k(u(x)) = 0$ donc $x \in \ker u^{k+1}$. On a bien montré l'inclusion réciproque.

Ici : u est nilpotent d'indice d donc $\ker u^d = E$ et $\ker u^{d-1} \neq E$ donc par le lemme toutes les inclusions précédentes sont strictes.

b) Suivant les notations du 3), on note $V_i = \ker(u^i)$.

L'essentiel est que si $x \in u(\ker u^i)$ alors $x = u(x_1)$ avec $u^i(x_1) = 0$ donc $u^{i-1}(x) = u^i(x_1) = 0$.

Donc $u(\ker(u^i)) \subset \ker(u^{i-1})$ donc $u(V_i) \subset V_{i-1}$.

Le 3) e) montre donc bien qu'en prenant une base adaptée à ce drapeau, la matrice de u dans cette base est T.S.S.

Partie II : les sous-algèbres maximales de $M_n(\mathbb{R})$

1) On montre que $\mathcal{A}_F$ est un s.e.v. de F , qu'il contient id et qu'il est stable par $\circ$.

2) On fixe une base $\mathcal{B}_F$ de F , qu'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E .

Alors un élément $u \in \mathcal{L}(E)$ est dans $\mathcal{A}_F$ si, et seulement si, sa matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$,

matrice par bloc où $A \in M_p(\mathbb{K})$ (la taille des autres blocs s'en déduit).

Donc $\mathcal{A}(F)$ est isomorphe comme e.v. à l'e.v. de ces matrices, lui-même isomorphe à $M_p(\mathbb{K}) \times M_{p,(n-p)}(\mathbb{K}) \times$

$M_{(n-p)^2}(\mathbb{K})$ via l'application $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mapsto (A, B, D)$.

Donc $\dim(\mathcal{A}(F)) = p^2 + (n-p)p + (n-p)^2 = n^2 - pn + p^2$.

3) On étudie $f : x \in [1, n] \mapsto n^2 - xn + x^2$. On a $f'(x) = -n + 2x$ donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq n/2$.

On en déduit que f est décroissante sur $[1, n/2]$ et croissante sur $[n/2, n]$.

Comme $f(1) = n^2 - n + 1$ et $f(n-1) = n^2 - (n-1)n + (n-1)^2 = f(1)$, le max. demandé est donc $f(1) = f(n-1) = n^2 - n + 1$ atteint seulement pour $p = 1$ et $p = n-1$.

4) Forme bilinéaire déf. positive... ou écriture en coordonnées

5) D'après le cours, comme $M_n(\mathbb{R})$ est un espace euclidien (dim. finie) on a : $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp = M_n(\mathbb{R})$ donc

$\dim(\mathcal{A}^\perp) = n^2 - \dim(\mathcal{A})$. Avec les notations de l'énoncé $\boxed{r = n^2 - d}$.

6) Soit $N \in \mathcal{A}$ et $i \in [1, r]$. On veut montrer que pour tout $M \in \mathcal{A}$, $({}^t N A_i | M) = 0$.

Soit $M \in \mathcal{A}$. Par déf. $({}^t N A_i | M) = \text{Tr}({}^t ({}^t N A_i) M) = \text{Tr}({}^t A_i N M) = (A_i | N M)$.

Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, on sait que $N M \in \mathcal{A}$ et comme $A_i \in \mathcal{A}^\perp$, on a bien $(A_i | N M) = 0$.

Ainsi $({}^t N A_i | M) = 0$, ce qui montre la conclusion.

7) La transposition est un isomorphisme d'e.v. de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même donc ${}^t \mathcal{A}$ est un e.v. de même dimension que $\mathcal{A}$.

En outre ${}^t \mathcal{A}$ contient $I = {}^t I$ et ${}^t \mathcal{A}$ est stable par produit car ${}^t M \cdot {}^t N = {}^t N M$ et donc si M et N sont dans $\mathcal{A}$, $N M$ est dans $\mathcal{A}$ et ${}^t N M \in {}^t \mathcal{A}$.

8) Soit ${}^t N \in {}^t \mathcal{A}$ (et donc $N \in \mathcal{A}$). Il suffit de montrer que pour tout $i = 1, \dots, r$, ${}^t N \cdot A_i X \in F$.

Soit $i \in [1, r]$. Or par la question 6), on sait que ${}^t N A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

Donc ${}^t N A_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k A_k$ avec λ_k des réels puisque $\mathcal{A}^\perp = \text{Vect}(A_1, \dots, A_r)$.

Ainsi ${}^t N A_i X = \sum_{k=1}^r \lambda_k A_k X \in F$ ce qui donne la conclusion.

9) Par le 3), on sait que déjà que les algèbres de la forme $\mathcal{A}_D$ où D est une droite de E (ou bien $\mathcal{A}_H$ où H est un hyperplan de E), sont de dimension $n^2 - n + 1$. Donc si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stricte de dim. maximale, on sait que $n^2 - n + 1 \leq \dim \mathcal{A} < n^2$.

On en déduit que $r = \dim \mathcal{A}^\perp$ vérifie $0 < r \leq n-1$.

Mais alors pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\dim(\text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)) \leq r \leq n-1$.

En choisissant X tel que $\text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X) \neq \{0\}$ (ce qui est possible car par exemple A_1 n'est pas la matrice nulle et on choisit $X \notin \ker A_1$), on sait alors que $F = \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$ est un s.e.v. de E vérifiant $1 \leq \dim F \leq n-1$ et donc par le 3), $\dim(\mathcal{A}_F) \leq n^2 - n + 1$ et par le 8), $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_F$ donc $\dim(\mathcal{A}) \leq n^2 - n + 1$.

Donc on vient de montrer que les sous-algèbres strictes $\mathcal{A}$ de dimension maximale sont de dimension exactement $n^2 - n + 1$. Ceci donne en particulier l'inégalité demandée par l'énoncé.

Partie III Sous algèbres de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $\mathbb{R}[A]$

1) (Cf. DM 14). a) On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
[\exists X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad AX = \lambda X] &\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \\
&\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\
&\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0, \\
&\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.
\end{aligned}$$

b) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à A .

Par a) il existe un $v_1 \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ et de même il existe un $v_2 \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(v_2) = \lambda_2 v_2$.

Notons $E_1 = \text{Vect}(v_1)$ et $E_2 = \text{Vect}(v_2)$. On a $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ car si $v \in E_1 \cap E_2$, on a $f(v) = \lambda_1 v$ et $f(v) = \lambda_2 v$, donc $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ donc $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$ et comme par hyp. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $v = 0$.

Donc (v_1, v_2) est libre et comme E est de dim. deux, c'est une base de E .

On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$. Par déf. de v_1 et v_2 , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Ainsi en notant $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on sait que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ et que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Les deux matrices A et $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ sont donc semblables.

c) Ceci est un cas particulier d'un théorème général (Cayley-Hamilton) au programme de deuxième année.

Ici une simple vérification suffit. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ d'un côté et $\text{Tr}(A)A + \det(A)I = (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

2) Par déf. $\mathbb{A} = \text{Vect}(I, A)$ donc $\mathbb{A}$ est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{A}$ contient I .

Pour montrer que $\mathbb{A}$ est une sous-algèbre, il suffit de montrer que $\mathbb{A}$ est stable par produit.

Or par bilinéarité du produit, il suffit de montrer que les produits 2×2 des éléments de la base (I, A) de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{A}$. C'est évident pour $I \times I$, $I \times A$ et $A \times I$. Enfin le 1) c) dit que $A^2 \in \text{Vect}(I, A)$ ce qui suffit pour conclure.

Si on préfère être plus explicite : si $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$,

$$(aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) = aa'I + (ab' + a'b)A + bb'A^2 \in \text{Vect}(I, A)$$

car $A^2 \in \text{Vect}(I, A)$.

3) a) *Analyse* : si $A \in M_2(\mathbb{R})$ s'écrit $A = \lambda I_2 + A'$ avec A' de trace nulle, alors $\text{Tr}(A) = \lambda \text{Tr}(I) + 0 = 2\lambda$.

Ainsi $\lambda = \frac{\text{Tr}(A)}{2}$ et $A' = A - \frac{\text{Tr}(A)}{2}I$.

Cette analyse démontre l'unicité d'une telle écriture, si elle existe

Synthèse : soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ quelconque. Soit $\lambda = \text{Tr}(A)/2$. Soit $A' = A - \frac{\text{Tr}(A)}{2}I$.

Par déf. de A' , on a bien $A = \lambda I + A'$. Reste à vérifier que A' est bien de trace nulle.

Or par linéarité de la trace, $\text{Tr}(A') = \text{Tr}(A) - \frac{\text{Tr}(A)}{2} \text{Tr}(I) = \text{Tr}(A) - \text{Tr}(A) = 0$.

Cette synthèse démontre l'existence de l'écriture demandée, pour toute matrice

b) On a vu que $\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I, A)$ et $\mathbb{R}[A'] = \text{Vect}(I, A')$.

Or $A = \lambda I + A'$ donc $A \in \text{Vect}(I, A')$ et donc $\text{Vect}(I, A) \subset \text{Vect}(I, A')$.

Inversement $A' = A - \lambda I$ ce qui donne l'autre inclusion.