MPSI 1 **Samedi 6 Avril 2019**

Mathématiques D.S. 7, 3 heures 45

Les calculatrices et téléphones ou autres appareils éléctroniques (hors pacemaker) sont interdits.

Problème 1 : étude d'un procédé de resommation

Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$. A toute suite complexe a, on associe ici la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

L'objet de ce problème est de comparer les propriétés de la série $\sum a_n^*$ à celles de $\sum a_n$.

Partie I : exemple d'une série géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

1) Exprimer a_n^* en fonction de z et n, sans $\sum$.
2) On suppose que $|z| < 1$.
   a) Justifier la convergence de la série $\sum a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   b) Justifier la convergence de $\sum a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.
3) On suppose que $|z| \geq 1$.
   a) Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum a_n$?
   b) Quelle est la nature de $\sum a_n^*$ si $z = -2$?
   c) On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$. Montrer que la série $\sum a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : étude générale

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs *réelles*.

4) **Comparaison des convergences des deux suites.**
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [|0, n|]$.
      (i) Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
      (ii) En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.
      On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_q(n, a)$.
   c) On suppose que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $a_n^* \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   d) On suppose que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} a_n^*$.
   e) La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?
5) **Comparaison des convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.**
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.
   a) Un calcul facile donne :

$$U_0 = S_0,\ U_1 = 2S_0 + S_1,\ U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0,\ U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0.$$

   A partir de ces premières formules, démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, (\lambda_{n,k})_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k,$$

   on explicitera les coefficients $\lambda_{n,k}$. (On pourra remarquer que $\forall\, k \in [|0, n|]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$, en posant $S_{-1} = 0$).

b) On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

c) La convergence de la série $\sum a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum a_n^*$?

Partie III : application à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle d'ordre n de la série harmonique.

Soit φ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \dfrac{1-(1-x)^n}{x}$.

6) **Somme de la série harmonique alternée :** Démontrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

7) **Une autre formule pour H_n :**

a) Justifier que φ est une fonction polynomiale (on la prolonge donc en 0).

b) En considérant $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$, démontrer la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$.

8) **Synthèse :** Déduire de ce qui précède la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^n}$.

Problème 2 : Un ordre dans l'ensemble des projecteurs d'un espace vectoriel

1) **Un résultat général sur les commutants.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$ appelé le commutant de f. Montrer que :
a) $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ b) $\mathcal{C}(f)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

2) **Un exemple de projecteur :** Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que p est un projecteur de E et déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\operatorname{Im}(p)$ et une base $\mathcal{B}''$ de $\ker p$. On appelle $\mathcal{B}$ la base de E obtenue en juxtaposant $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.

3) **Caractérisation géométrique des éléments de $\mathcal{C}(p)$ pour p projecteur quelconque :**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{L}(E),\ p^2 = p\}$ l'ensemble des projecteurs de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathcal{P}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}(p)$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par f.

4) **Retour à l'exemple du 2) :**
On reprend l'exemple du projecteur p du 2) avec la base $\mathcal{B}$ de cette question.

a) Traduire le résultat du 3) matriciellement en caractérisant les éléments de $\mathcal{C}(p)$ par la forme de leur matrice dans la base $\mathcal{B}$.

b) Retrouver le résultat du a) par un pur calcul matriciel (à l'aide de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$).

5) **Un ordre sur l'ensemble des projecteurs :**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{L}(E),\ p^2 = p\}$ l'ensemble des projecteurs de E.
Pour tout $(p,q) \in \mathcal{P}^2$, on note $p \leq q$ ssi $p \circ q = q \circ p = p$.

a) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}$.

b) Justifier que $\leq$ n'est pas une relation d'ordre total dès que E est de dimension au moins deux

6) **Caractérisation géométrique de la relation $\leq$:**
Soit $(p,q) \in \mathcal{P}^2$ tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :
a) $p \leq q \Leftrightarrow \ker q \subset \ker p$. b) $p \leq q \Leftrightarrow \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$.

7) **Borne sup. de deux projecteurs qui commutent :**
Soient p et q dans $\mathcal{P}$ tels que $p \circ q = q \circ p$.

a) Montrer que $r = p + q - (p \circ q)$ est un projecteur.

b) Montrer que r est le plus petit des majorants de $\{p,q\}$ pour l'ordre $\leq$ et que $\operatorname{Im}(r) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$.

8) **A la recherche de la borne inf. de deux projecteurs qui commutent :** Soient encore p et q dans $\mathcal{P}$ tels que $p \circ q = q \circ p$.
En remarquant qu'un minorant s de $\{p,q\}$ doit vérifier $\operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(s)$, donner un candidat naturel comme plus grand des minorants de $\{p,q\}$ pour $\leq$ (et si vous avez le temps validez-le).