MPSI 1 **Samedi 6 Avril 2019**

Mathématiques D.S. 7 solutions

Problème 1 : étude d'un procedé de resommation

1) D'après la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}(z+1)^n = \left(\frac{z+1}{2}\right)^n.$$

2) On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

a) Pour $|z|<1$, on sait que $\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-z}$ on en déduit que $\sum a_n$ converge et

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

b) Par I.T. $\left|\frac{z+1}{2}\right| \le \frac{1+|z|}{2}$. Donc si $|z|<1$, on a aussi $\left|\frac{z+1}{2}\right|<1$ et $\sum a_n^* = \sum \left(\frac{z+1}{2}\right)^n$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme :

$$\sum_{n\ge0} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

3) a) Pour $|z|\ge1$, (a_n) ne tend pas vers 0, donc la série $\sum a_n$ est grossièrement divergente.

b) Si $z=-2$ alors $a_n^* = (-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

c) Pour $z=e^{i\theta}$, on a par le 1), $a_n^* = (\frac{e^{i\theta}+1}{2})^n = \cos^n(\theta/2)e^{ni\theta/2} = r^n$ avec $r=\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$.
Donc $|r| = \cos(\theta/2)$ et comme $|\theta| \in]0,\pi[$, $|\cos(\theta/2)| \in]0,1[$ et donc $\sum a_n^*$ converge comme série géométrique de raison r telle que $|r|<1$ et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k^* = \frac{1}{1-r} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)} = 1 + i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Donc $\mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{\infty} a_k^*) = 1$ et $\mathrm{Im}(\sum_{n=0}^{\infty} a_k^*) = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.

4) a) (i) Comme k est fixé, le nombre du facteurs du produit $n(n-1)\dots(n-k+1)$ étant k fixé, chaque facteur étant équivalent à n quand $n\to+\infty$, on obtient :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

(ii) Par thme de croissance comparée (puissance/exponentielle) on sait que pour chaque entier k fixé, on a : $n^k = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$ donc avec le (i) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$$

b) q étant fixé, $S_q(n,a)$ est alors une somme d'un nombre fixé de suites de limite nulle et donc par somme de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$$

c) *Méthode Cesaro (en fait il s'agit d'un cas particulier du théorème de Cesaro pondéré du DM)*
Soit $\varepsilon>0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que $\forall k\ge q$, $|a_k|\le\varepsilon/2$. Le rang q étant ainsi fixé, la suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que $\forall n\ge n_0$, $|S_q(n,a)|\le\varepsilon/2$.
On a alors

$$\forall n\ge n_0,\ |a_n^*| = \left|S_q(n,a) + \frac{1}{n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \le \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, on a finalement

$$\forall n\ge n_0,\ |a_n^*|\le\varepsilon$$

et on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$$

d) Comme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, on a :

$$a_n^* - \ell = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - \ell)$$

et on est ramené à la question précédente : avec $a_n - \ell \to 0$, on obtient que $a_n^* - \ell \to .0$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = \ell$$

e) Si $a_n = (-2)^n$ alors d'après le calcul fait au 3) b), $(a_n^*) = ((-1/2)^n)$ et donc (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

5) a) Notons :

$$H(n) \ : U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$$

Montrons par récurrence que $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation :** L'énoncé donne que $H(n)$ est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$.

• **H.R. :** Soit $n \geq 1$ tel que $H(n-1)$ soit vraie. On a donc :

$$H(n-1) \ : U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}S_k \qquad (1)$$

Par déf. de U_n :

$$U_n = 2^n T_n = 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k \qquad (2)$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. En réordonnant les termes (on scinde la somme en deux et on réindice), on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\right)S_k + S_n \quad (3)$$

Avec $(2), (1), (3)$, on a donc

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)S_k + S_n$$

La formule $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ donne alors $H(n)$.

La récurrence est établie.

b) On suppose que $\sum a_n$ converge et on note S sa somme. On a donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$. Avec la question précédente, en réindiçant :

$$U_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} - S_1$$

Comme $S_{n+1} \to S$, la question 4) d) indique que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} = S$$

ce qui donne $\dfrac{U_{n-1}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et donc $T_{n-1} = \frac{U_{n-1}}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2S$. Ainsi a série $\sum a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

(comme dans le cas particulier vu au 2) b)).

c) Comme vu au 4) e), si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = (-2)^n$ alors $\sum a_n$ diverge grossièrement alors que $\sum a_n^*$ converge (cf. 3) b)). Les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ n'ont donc pas toujours même nature.

Idée : la resommation fait converger *davantage* de série...

6) Trois méthodes vues en cours ou TD : ITL, $\frac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$, $A_n = H_{2n} - H_n$.

7) a) Comme $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k = 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}x^k$, on en déduit que :

$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}x^{k-1}$ et donc φ est une fonction polynôme qui se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

b) Donc en posant $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$, on a $\Phi(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$ (1).

Mais d'autre part, *et là c'est magique !!*, la formule $\varphi(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x}$ peut se lire, pour $x \neq 1$, comme la somme des termes de la suite géométrique de raison $1-x$ entre les termes 0 et $n-1$.

Donc pour $x \neq 1$ on a : $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$, mais comme les deux membres de cette égalité sont des fonctions polynomiales, cette égalité est vraie sur $\mathbb{R}$ entier.

Donc on a une autre formule pour $\Phi(x)$ à savoir $\Phi(x) = \left[-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_{t=0}^{t=x}$.

Donc $\Phi(1) = \left[-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n$ (2).

En comparant (1) et (2) on a la conclusion. □

8) En notant $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ la question 7) b) montre que $a_n^* = \frac{1}{2^n}H_n$.

Par la question 6), on sait que $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(2)$.

On peut alors appliquer la question 5) a) et en déduire que $\sum a_n^* = \sum \frac{H_n}{2^n}$ est convergente et que sa somme vérifie $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{2^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2\ln(2)}$.

Problème 2 : Un ordre dans l'ensemble des projecteurs d'un espace vectoriel

1) a) Montrons que $C(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.
(i) $C(f)$ contient l'application $0 \in \mathcal{L}(E)$ de manière évidente
(ii) Soit $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(g_1,g_2) \in C(f)^2$.
Alors pour tout $f \in S$, par bilinéarité de la composition : $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)\circ f = \lambda_1(g_1\circ f) + \lambda_2(g_2\circ f) = \lambda_1(f\circ g_1) + \lambda_2(f\circ g_2)$ car g_1 et g_2 sont dans S.
En regroupant, on obtient bien que $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)\circ f = f\circ(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$.
Donc $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \in C(f)$.
Avec (i) et (ii) on a montré que $C(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.
b) Montrons que $C(f)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.
(i) Comme on sait déjà que $C(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$, en part. c'est un sous-groupe de $(\mathcal{L}(E),+)$.
(ii) On sait que : $\mathrm{id}_E \in C(f)$.
(iii) Reste à montrer que $C(f)$ est stable par $\circ$:
Soit $(g_1,g_2) \in C(f)^2$. Soit $f \in S$.
Alors $(g_1\circ g_2)\circ f = g_1\circ(g_2\circ f) \overset{(1)}{=} g_1\circ(f\circ g_2) = (g_1\circ f)\circ g_2 \overset{(2)}{=} (f\circ g_1)\circ g_2 = f\circ(g_1 \circ g_2)$.
Notons que (1) et (2) sont vraies car prop. $g_1 \in C(f)$ et $g_2 \in C(f)$.
D'où la conclusion $g_1\circ g_2 \in C(f)$.
Avec (i), (ii), (iii), on a montré que $C(f)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$.
Au total : $\boxed{C(f) \text{ est une sous-algèbre de } (\mathcal{L}(E),+,\circ,\cdot).}$

2) (i) Pour montrer que p est un projecteur, il suffit de montrer que $A^2 = A$.
Par exemple pour la première entrée de A^2 on a $1/9(2^2 + 0\times 1 + (-2)\times(-1) + 0) = 1/9(4+2) = 2/3$ qui est bien la première entrée de A. On calcule ainsi A^2 et on voit que $A^2 = A$ et donc $\boxed{p \in \mathcal{P}}$.
(ii) Pour déterminer une base de $\mathrm{Im}(p)$:
En notant C_i les colonnes de la matrice, on voit que $C_4 = 0$ et $C_3 = -C_1$.
Donc en notant $\mathcal{B}_0 = (e_1,e_2,e_3,e_4)$, on sait alors que $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Vect}(p(e_1),p(e_2),p(e_3),p(e_4)) = \mathrm{Vect}(p(e_1),p(e_2))$ et ces deux vecteurs $p(e_1)$ et $p(e_2)$ sont indépendants (colonnes non proportionnelles). Donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) \text{ admet comme base } (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \text{ où } \varepsilon_1 = (2,0,-1,0) \text{ et } \varepsilon_2 = (1,3,1,0)}$.

(iii) Pour $\ker p$. Avec les colonnes, on a $p(e_4) = 0$ et $p(e_3) = -p(e_1)$ i.e. $p(e_3 + e_1) = 0$.
Cela fournit donc deux vecteurs indépendants e_4 et $e_3 + e_1$ dans $\ker p$. Comme par théorème du rang, $\dim \ker p = 4 - 2 = 2$, on sait que $\boxed{(e_1 + e_3, e_4) \text{ est une base de } \ker p}$

3) (Fait en exercice de planche) Le sens $\Rightarrow$ n'utilise pas le fait que p est un projecteur.

4) a) Par le 3), les éléments de $\mathcal{C}(p)$ sont exactement les f tels que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f. Cela équivaut à dire que leur matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :
$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$ où les $*$ désignent à chaque fois un nombre quelconque.

b) On sait que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de p est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_4(\mathbb{R})$ quelconque $MP = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 0 & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $PM = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc
$$MP = PM \Leftrightarrow m_{4,1} = m_{4,2} = m_{3,1} = m_{3,2} = m_{1,3} = m_{1,4} = m_{2,3} = m_{2,4} = 0$$

Ceci équivaut bien à dire que M est de la forme $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$ donnée au a).

5) a) On veut montrer que $\leq$ est réflexive, antisymétrique, transitive.

(i) Réflexivité : soit $p \in \mathcal{P}$. On veut montrer que $p \leq p$. Or la relation $p \leq p$ équivaut à $p \circ p = p$ ce qui est vrai car p est un projecteur.

(ii) Antisymétrie : soit $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ tels que $p \leq q$ et $q \leq p$.
On a donc $p \circ q = q \circ p = p$ et $p \circ q = q \circ q = q$ donc $p = q$.

(iii) Transitivité : soit $(p, q, r) \in \mathcal{P}^3$ tels que $p \leq q$ et $q \leq r$.
On a donc $p \circ q = p \quad (1)$, $q \circ p = p \quad (2)$, $q \circ r = q \quad (3)$, $r \circ q = q \quad (4)$.
On veut montrer que $p \circ r = p \quad (5)$, et $r \circ p = p \quad (6)$.
• Or en composant par r à droite dans (1), on a : $p \circ q \circ r = p \circ r$.
Avec (3) dans le premier membre de cette égalité, on obtient $p \circ q = p \circ r$.
Et de nouveau avec (1), on obtient finalement $p = p \circ r$ ce qui est bien (5).
• En composant par r à gauche dans (2), on a : $r \circ q \circ p = r \circ p$.
Dans le premier membre de cette égalité, avec (4) on obtient $q \circ p = r \circ p$ puis avec (2), finalement $p = r \circ p$ ce qui est (6).

b) Il suffit de trouver deux projecteurs p et q non nuls tous les deux tels que $p \circ q = q \circ p = 0$
Pour cela, on choisit une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces $E = E_1 \oplus E_2$ avec $E_1 \neq \{0\}$ et $E_2 \neq \{0\}$ et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et q le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.
On a alors bien $p \circ q = q \circ p = 0$ et $p \neq 0$, $q \neq 0$.

6) a) Sens $\Leftarrow$: on a $p \leq q$ et donc $p \circ q = p \quad (1)$. Soit $x \in \ker q$. Alors $q(x) = 0$ donc $p(q(x)) = p(0) = 0$ et avec (1), on a $p(x) = 0$ donc $x \in \ker p$. On a bien montré l'inclusion $\ker q \subset \ker p$.
Sens $\Rightarrow$: on a $\ker q \subset \ker p$.
Soit $x \in E$. Comme q est un projecteur, on sait que $E = \ker q \oplus Fix(q)$ et on écrit $x = x_K + x_I$ avec $x_K \in \ker(q)$ et $x_I \in Fix(q)$.
Alors $q(x) = x_I$ et donc $p(q(x)) = p(x_I) \quad (*)$.
D'autre part par linéarité p, $p(x) = p(x_K) + p(x_I)$ et comme $x_K \in \ker q \subset \ker p$, on en déduit que $p(x) = p(x_I) \quad (**)$.
Avec $(**)$ et $(*)$, on a $p \circ q = p$ et comme p et q commutent par hyp. on a bien $p \leq q$.

b) Sens $\Leftarrow$: on a $p \leq q$ et donc $q \circ p = p \quad (2)$. Soit $y \in \mathrm{Im}\, p$. On a un $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Avec (2), on a $y = q(p(x))$ donc $y = q(z)$ donc $y \in \mathrm{Im}\, q$. On a bien montré l'inclusion $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Im}\, q$.

Sens $\Rightarrow$: on a $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$, c'est-à-dire, comme p et q sont des projecteurs $Fix(p) \subset Fix(q)$.
Soit $x \in E$. Comme p est un projecteur, on sait que $E = \ker p \oplus Fix(p)$ et on écrit $x = x_K + x_I$ avec $x_K \in \ker(p)$ et $x_I \in Fix(p)$
Alors $p(x) = x_I \quad (*)$ et donc $q(p(x)) = q(x_I)$. Mais comme $Fix(p) \subset Fix(q)$, on a aussi $q(x_I) = x_I$.
Ainsi $q(p(x)) = x_I \quad (**)$ et donc avec $(*)$ et $(**)$ on a : $q(p(x)) = p(x)$.
On a donc $q \circ p = p$ et comme p et q commutent par hyp. on a bien $p \le q$.

7) a) Notons $r = p + q - p \circ q$. Alors comme p et q commutent et qu'on a vu que le commutant était stable par $\circ$ tous les termes de la somme commutent entre eux, $r^2 = (p+q-p\circ q)\circ(p+q-p\circ q) = p^2 + q^2 + (p \circ q)^2 + 2p \circ q - 2p \circ (p \circ q) - 2q \circ (p \circ q)$.
Avec $p^2 = p$, $q^2 = q$ et les commutations, on obtient $r^2 = p + q + 2p \circ q - 2p \circ q - 2p \circ q = r$ donc $r \in \mathcal{P}$.

b) On veut montrer que :

(i) r est un majorant de p et q,
(ii) tout majorant s de p et q vérifie $r \le s$.
(iii) $\operatorname{Im}(r) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(s)$.

• Pour le (i) (et une partie du (iii)), sachant que p et q commutent, avec le 1) on sait que r commute aussi à p et q, et donc par 6) b) il suffit de montrer que $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Im}(r) \quad (1)$ et $\operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(r) \quad (2)$.
Comme les images sont les s.e.v. fixes : soit $y \in \operatorname{Im}(p) = Fix(p)$, on a $p(y) = y$ et $r(y) = y + q(y) - (q \circ p)(y) = y + q(y) - q(y) = y$ donc $y \in Fix(r)$.
Comme la déf. de r est symétrique en p, q, on a aussi (2) en échangeant les rôles
Ainsi avec 6.b) on sait que $\boxed{r \text{ est un majorant de } \{p,q\} \text{ i.e. notre (i)}}$.
• Pour le (ii) : soit s un majorant de $\{p,q\}$, on veut montrer que $r \le s$ autrement dit que $r \circ s = s \circ r = r$.
Comme s commute à p et q, on sait (cf. 1)) que s commute à $r = p + q - p \circ q$.
Si on considère par exemple $s \circ (p + q - p \circ q) = s \circ p + s \circ q - s \circ p \ \circ q$, comme $s \circ p = p$ et $s \circ q = q$, on obtient :

$$s \circ r = p + q - p \circ q = r$$

D'où le (ii).
• Pour le (iii), on a déjà montré pour le (i) que $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Im}(r) \quad (1)$ et $\operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(r) \quad (2)$ et donc (comme $\operatorname{Im} r$ est un s.e.v.) on a l'inclusion : $\operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(r)$.
Réciproquement : si $y \in \operatorname{Im}(r)$, on a un $x \in E$ tel que $y = p(x) + q(x) - p(q(x)) = p(x - q(x)) + q(x)$ avec $p(x - q(x)) \in \operatorname{Im} p$ et $q(x) \in \operatorname{Im}(q)$ donc $y \in \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$, d'où l'autre inclusion $\operatorname{Im}(r) \subset \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$.
On a bien montré que $\operatorname{Im}(r) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$.
Exercice supplémentaire : *Que dire de* $\ker(r)$ *?*

8) Je laisse encore un peu chercher ? ?