

DM 13 (théorème de Skolem Noether) solutions

- 1) a) On considère l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \rightarrow M_{1,n}(\mathbb{K})$ qui à toute forme linéaire φ associe sa matrice $(\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}$ au départ (à l'arrivée il s'agit de scalaires, on ne précise donc pas la base d'arrivée de $\mathbb{K}$ qui est en fait (1)).
On sait d'après le cours que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme d'e.v.
On en déduit que la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ car elle s'envoie par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ sur la base canonique de $M_{1,n}(\mathbb{K})$.
- b) On peut donner le même argument qu'au a) avec cette fois l'isomorphisme d'e.v. : $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$.
La famille des $(u_{i,j})$ s'envoie sur la base canonique $(E_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{K})$.
C'est donc bien une base.
- c) (i) Soit $x_1, x_2 \in E$ et λ_1, λ_2 dans $\mathbb{K}$. Comme φ est linéaire :

$$u_{\varphi, \varepsilon}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2))\varepsilon$$

et par distributivité pour les scalaires, on conclut bien que :

$$u_{\varphi, \varepsilon}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u_{\varphi, \varepsilon}(x_1) + \lambda_2 u_{\varphi, \varepsilon}(x_2).$$

Donc $u_{\varphi, \varepsilon} \in \mathcal{L}(E)$.

De manière évidente, pour tout $x \in E$, $u_{\varphi, \varepsilon}(x) \in \text{Vect}(\varepsilon)$ donc $\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon}) \subset \text{Vect}(\varepsilon)$.

D'autre part comme $u_{\varphi, \varepsilon}$ n'est pas l'application nulle car φ n'est pas l'application nulle, $\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon})$ est de dim. au moins 1, ce qui donne l'égalité :

$$\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon}) = \text{Vect}(\varepsilon).$$

De même on a trivialement $\ker(\varphi) \subset \ker(u_{\varphi, \varepsilon})$ et comme de même $\ker(u_{\varphi, \varepsilon})$ n'est pas égal à E entier et que $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E , on conclut que :

$$\ker(u_{\varphi, \varepsilon}) = \ker(\varphi)$$

- (ii) On remarque que pour chaque (i, j) , on a l'égalité : $u_{i,j} = u_{e_j^*, e_i}$.
En effet dans la déf. des $u_{i,j}$ donnée dans l'énoncé, on a : $\forall x \in E, u_{i,j}(x) = e_j^*(x)e_i$.
- (iii) On va montrer que $u_{i,j}$ est un projecteur ssi $i = j$. Plus généralement, on va montrer que $u_{\varphi, \varepsilon}$ est un projecteur ssi $\varphi(\varepsilon) = 1$ ce qui donne en particulier le résultat pour les $u_{i,j}$ puisque $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$.
Pour cela, on peut utiliser la caractérisation : p est un projecteur ssi $p \circ p = p$.
Ici pour chaque $x \in E$, $(u_{\varphi, \varepsilon} \circ u_{\varphi, \varepsilon})(x) = \varphi(\varphi(x)\varepsilon)\varepsilon = \varphi(x)\varphi(\varepsilon)\varepsilon \quad (*)$.
On voit donc déjà que si $\varphi(\varepsilon) = 1$, on a bien $(u_{\varphi, \varepsilon} \circ u_{\varphi, \varepsilon}) = u_{\varphi, \varepsilon}$.
Réciproquement, si on suppose que $u_{\varphi, \varepsilon}$ est un projecteur et si on choisit un $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, avec $(*)$, on a $\varphi(x)\varphi(\varepsilon)\varepsilon = \varphi(x)\varepsilon$ et comme $\varepsilon \neq 0$ et $\varphi(x) \neq 0$, on conclut que $\varphi(\varepsilon) = 1$. $\square$
- d)

Attention à la notion d'élément *minimal* pour l'ordre $\leq$ partiel. Comme indiqué par le N.B. cette notion est distincte de celle de *minimum* pour un ordre total. Il ne s'agit pas de dire qu'un p minimal est plus petit que *tous* les q mais seulement qu'il est plus petit que *tous les* q qui lui sont comparables.

Lemme (aurait mérité une question) Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1 si, et seulement si, il s'écrit $u = u_{\varphi, \varepsilon}$ pour un certain couple $(\varphi, \varepsilon) \in (E^* \setminus \{0\}) \times (E \setminus \{0\})$.

Dém du lemme : le sens facile est le sens $\Leftarrow$: on a vu au c) (i) que $u_{\varphi, \varepsilon}$ est de rang 1, d'image $\mathbb{K}\varepsilon$.

Sens $\Rightarrow$: soit u de rang 1. Soit ε tel que $\text{Im}(u) = \mathbb{K}\varepsilon$.

Pour chaque $x \in E$, on sait que $u(x) \in \mathbb{K}\varepsilon$ donc il existe bien un scalaire (unique) $\varphi(x)$ tel que $u(x) = \varphi(x)\varepsilon$. Ceci définit bien une application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$. Reste à montrer que φ est linéaire.

Soit $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $u(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y)\varepsilon$ (1).

Mais comme u est linéaire, on a aussi $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda \varphi(x)\varepsilon + \mu \varphi(y)\varepsilon$ (2)

Donc en identifiant (1) et (2), comme $\varepsilon \neq 0$, on a :

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y).$$

□

Application du lemme à la question posée :

(i) $\Rightarrow$ (iii) Soit p un projecteur de rang 1. Par le lemme, comme p est de rang 1, il s'écrit $p = u_{\varphi, \varepsilon}$. Par la question c) (iii), comme p est un projecteur, on sait que $\varphi(\varepsilon) = 1$.

Mieux : en fait, la même question c) (iii) (et l'équivalence du lemme) montre l'équivalence entre (i) et (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit p un projecteur de rang 1. Soit $q \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ tel que $q \leq p$.

Par propriété vue de l'ordre $\leq$, on sait que $\text{Im } q \subset \text{Im } p$. Or comme $\text{Im } p$ est une droite et que $\text{Im } q$ n'est pas réduit à zéro, on conclut que $\text{Im } q = \text{Im } p$.

De même l'inclusion $\ker p \subset \ker q$ donne $\ker p = \ker q$ car $\ker p$ est un hyperplan et $\ker q \neq E$.

Ainsi p et q sont deux projecteurs ayant même image et même noyau donc $p = q$.

On a bien montré que p est minimal pour $\leq$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) par contraposée : supposons que $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ n'est pas de rang 1. Il est donc de rang au moins deux. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\text{Im } p$ (avec $r \geq 2$) et $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\ker p$.

Soit q le projecteur sur $\text{Vect}(\varepsilon_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

On a $q \neq p$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$. Alors $p(x) = \sum_{i=1}^r x_i \varepsilon_i$ et $q(p(x)) = x_1 \varepsilon_1 = q(x)$.

De même $p(q(x)) = q(x)$.

Ainsi $q \leq p$ avec $p \neq q$ donc p n'est pas minimal pour $\leq$.

2) a) (i) On montre d'abord que A est linéaire :

si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $A(\lambda u + \mu v) = g \circ (\lambda u + \mu v) \circ g^{-1} \stackrel{(*)}{=} \lambda A(u) + \mu A(v)$, l'égalité $(*)$ étant vraie car $\circ$ est bilinéaire.

(ii) Il est immédiat que $A(\text{id}) = \text{id}$ car $g \circ \text{id} \circ g^{-1} = \text{id}$.

(iii) Enfin $A(u) \circ A(v) = g \circ u \circ g^{-1} \circ g \circ v \circ g^{-1} = g \circ u \circ v \circ g^{-1} = A(u \circ v)$.

Avec (i), (ii), (iii), on sait que A est un morphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Enfin, A est bijective car l'application $u \mapsto g^{-1} \circ u \circ g$ convient comme réciproque de A .

b) (i) Si $p \in \mathcal{P}$ alors $p^2 = p$ donc $A(p^2) = A(p)$ et comme A est un morphisme pour $\circ$, on a $A(p)^2 = A(p)$. Donc $A(p) \in \mathcal{P}$.

Notons aussi que la réciproque est vraie : si $A(p) \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ alors $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ puisque A^{-1} est aussi un morphisme d'algèbres.

(ii) Si $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ est minimal pour $\leq$ alors $A(p)$ est aussi minimal pour $\leq$.

En effet : si $q \leq A(p)$ alors comme A est bijective, il existe un $q_1 \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ tel que $q = A(q_1)$.

Et la relation $A(q_1) \leq A(p)$ avec $A(q_1) \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ signifie que $A(q_1) \circ A(p) = A(p) \circ A(q_1) = A(q_1)$ et donc via A^{-1} on a $p \circ q_1 = q_1 \circ p = q_1$ et minimalité de p , on conclut que $q_1 = p$ et donc $q = A(p)$ ce qui montre la minimalité de $A(p)$.

- (iii) Comme $u_{i,i}$ est minimal pour l'ordre dans $\mathcal{P} \setminus \{0\}$, on sait donc que $A(u_{i,i})$ aussi et par 1) d) (iii) on a la propriété demandée.
- (iv) Soit $i \neq j$. Comme $A(u_{i,i} \circ u_{j,j}) = A(0) = 0$, on a $A(u_{i,i}) \circ A(u_{j,j}) = 0$.
Donc $u_{\phi_i, \varepsilon_i} \circ u_{\phi_j, \varepsilon_j} = 0$.
En évaluant ces applications sur le vecteur ε_j comme $u_{\phi_j, \varepsilon_j}(\varepsilon_j) = \varepsilon_j$, on obtient $u_{\phi_i, \varepsilon_i}(\varepsilon_j) = 0$.
Donc $\boxed{\text{si } i \neq j, \text{ on a : } \phi_i(\varepsilon_j) = 0}$ car $\varepsilon_i \neq 0$.
Ainsi on a $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \phi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ ($\dagger$).
Montrons que ceci entraîne que les deux familles $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ sont libres.
- On prend une C.L. $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n = 0$.
Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on applique ϕ_i à cette égalité, on a $\lambda_i = 0$.
 - De même avec une CL $\lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_n \phi_n = 0$ et on applique ε_i .
- Remarque :** ainsi la relation ($\dagger$) dit que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ sont deux bases, la seconde étant la duale de la première.
- c) (i) Soit $k \neq j$: $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k, \varepsilon_k} = A(u_{i,j}) \circ A(u_{k,k}) = A(u_{i,j} \circ u_{k,k})$ et comme $j \neq k$, on obtient $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k, \varepsilon_k} = 0$.
Donc en appliquant cette égalité à ε_k , on obtient pour tout $k \neq j$, $A(u_{i,j})(\varepsilon_k) = 0$.
Donc $\ker(A(u_{i,j}) \circ \text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j))$, et comme A est injectif et $u_{i,j} \neq 0$, on sait que $\ker A(u_{i,j}) = \text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j)$.
- (ii) D'autre part $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i}) = A(u_{i,i}) = u_{\phi_i, \varepsilon_i}$.
En appliquant cette égalité au vecteur ε_i , on obtient $A(u_{i,j})(A(u_{j,i})(\varepsilon_i)) = \varepsilon_i$.
Donc $\varepsilon_i \in \text{Im}(A(u_{i,j}))$.
Comme $A(u_{i,j})$ est de rang 1 par la question précédente, $\text{Im}(A(u_{i,j})) = \text{Vect}(\varepsilon_i)$.
- (iii) Par ce qui précède $A(u_{i,j})$ et $u_{\phi_i, \varepsilon_i}$ ont le même noyau de $\dim n-1 : \text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j)$.
Si on considère l'image de ε_j , on a : $A(u_{i,j})(\varepsilon_j) = \lambda_j \varepsilon_j$
Donc les deux A.L. $A(u_{i,j})$ et $\lambda_j u_{\phi_j, \varepsilon_j}$ coïncident sur une base donc sont égales.
- d) $\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{j,k} u_{\phi_j, \varepsilon_i} \circ u_{\phi_k, \varepsilon_j} = A(u_{i,j} \circ u_{j,k}) = A(u_{i,k}) = \lambda_{i,k} u_{\phi_k, \varepsilon_i}$.
En appliquant cette égalité à ε_k , on a bien la relation $\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.
- e) (i) Pour chaque $i = 1, \dots, n$, on note $\alpha_i = \lambda_{i,1} \varepsilon_i$ (le choix de l'indice 1 est arbitraire ici comme on va le voir ci-dessous).
Comme les nombres $\lambda_{i,1}$ sont tous non nuls et que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E , on sait que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une base de E^* .
(ii) On sait que $\phi_1, \dots, \phi_n$ est la base duale de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ par 2) b) (iv)
Montrons que la base duale de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est la famille $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ où $\alpha_i^* = \frac{1}{\lambda_{i,1}} \phi_i$.
Il s'agit de montrer que pour tout (i, j) , $\alpha_j^*(\alpha_i) = \delta_{i,j}$ (*).
Or pour $i \neq j$, c'est évident car $\phi_j(\varepsilon_i) = 0$ et si $i = j$, $\alpha_i^*(\alpha_i) = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{i,1}} \phi_i(\varepsilon_i) = 1$.
Ainsi on a bien montré (*).
(iii) Montrons que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$.
Par le c), on sait que $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\phi_j, \varepsilon_i}$ (1).
Or pour chaque $x \in E$, par notre définition des α_i on sait que :
 $u_{\alpha_j^*, \alpha_i}(x) = \alpha_j^*(x) \alpha_i = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}} \phi_j(x) \varepsilon_i$ (2).
Par la relation du d), on sait que $\frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}} = \lambda_{i,j}$, et on en déduit avec (2) que :
 $\forall x \in E, u_{\alpha_j^*, \alpha_i}(x) = \lambda_{i,j} \phi_j(x) \varepsilon_i$ (3)
En comparant (3) et (1) on a bien montré que $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$.

f) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, g(e_i) = \alpha_i$.

Comme g envoie une base de E sur une base de E , on sait que g est bijective.

L'idée est que pour chaque (i, j) , $A(u_{i,j})$ agit sur la base des $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ comme $u_{i,j}$ agit sur la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Ceci va se traduire par la relation $A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.
L'opération $g \circ \square \circ g^{-1}$ « transporte l'action d'une base sur l'autre » ...

Montrons l'affirmation du cartouche ci-dessus :

Soit $x \in E$. On le décompose en $x = \sum_{k=1}^n x_k \alpha_k$ sur la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Alors on sait par la question précédente que $A(u_{i,j})(x) = x_j \alpha_i$ (1).

D'autre part : $g^{-1}(x) = \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon_k$ et donc $u_{i,j}(g^{-1}(x)) = x_j \varepsilon_i$.

Finalement $g(u_{i,j}(g^{-1}(x))) = x_j \alpha_i$ (2).

En comparant (1) et (2), on a bien montré que $A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$ comme annoncé.

g) Notons $B : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}$.

Par la question précédente, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A(u_{i,j}) = B(u_{i,j})$.

Les deux A.L. A et B coïncident sur la base $(u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ de $\mathcal{L}(E)$ donc sont égales partout.