

MATHÉMATIQUES D.S. 5, SOLUTIONS

Partie I :

a) On montre que E est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (e.v. de référence).

Pour cela, on remarque que par déf. si on note $f_1 : x \mapsto e^{-x} \cos(x)$, $f_2 : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$ et $f_3 : x \mapsto e^{-x}$ alors par déf. $E = \text{Vect}(f, g, h)$.

b) Comme $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ on sait que (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de E .

Montrons que (f_1, f_2, f_3) est libre.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x}(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma) = 0$ ce qui par non-annulation de l'exp. équivaut à $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma = 0$.

En particulier pour $x = 0$, on a $\alpha + \gamma = 0$ (1), pour $x = \pi/2$, on a $\beta + \gamma = 0$ (2) et pour $x = \pi$, on a $-\alpha + \gamma = 0$ (3).

Avec (1) et (3) on a $\alpha = \gamma = 0$ ce qui dans (2) donne $\beta = 0$.

Ainsi (f_1, f_2, f_3) est libre, et c'est donc une base de $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ Ainsi $\dim(E) = 3$.

c) Soit $f \in E$. Notons (a, b, c) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ae^{-x} \cos(x) + be^{-x} \sin(x) + ce^{-x}$ et $f'(x) = a(-e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)) + b(e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)) - ce^{-x}$.

Donc $f'(x) = (-a + b)e^{-x} \cos(x) + (-a - b)e^{-x} \sin(x) - ce^{-x}$. Ainsi $f'(0) = -a + b - c$.

Donc F est l'ensemble de $f \in E$ de coordonnées (a, b, c) telles que $-a + b - c = 0$.

Autrement dit F est un plan vectoriel notre espace E de dim. 3 car F est défini par l'équation cartésienne $-a + b - c = 0$.

Mais comme on en demande une base, il suffit de trouver deux éléments de E par exemple les vecteurs de coordonnées $(1, 1, 0)$ i.e. $f_1 + f_2$ et $(0, 1, 1)$ i.e. $f_2 + f_3$.

Comme ces vecteurs sont indép. $(f_1 + f_2, f_2 + f_3)$ est une base de F .

d) Avec les mêmes notations qu'au c).

Pour $f \in E$ de coord. (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$, on calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (-a + b)(-e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)) + (-a - b)(e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)) + ce^{-x}$.

Donc $f''(0) = (a - b) + (-a - b) + c = -2b + c$.

Donc G est l'ensemble des $f \in E$ dont les coordonnées (a, b, c) vérifient $\begin{cases} a + c = 0 \\ c = 2b \end{cases}$

Ces deux équations cartésiennes définissent une droite de E d'équation paramétrique $\begin{cases} a = -\lambda, \\ b = \lambda/2 \\ c = \lambda \end{cases}$ avec

$\lambda \in \mathbb{R}$ donc une droite de vecteur directeur de coord. $(-1, 1/2, 1)$.

Ainsi $G = \mathbb{R}g$ où $g = -f_1 + 1/2 f_2 + f_3$.

e) Comme g ne vérifie pas l'équation cartésienne de F car avec $(a, b, c) = (-1, 1/2, 1)$ on calcule que $a - b + c \neq 0$. on en déduit que $\mathbb{R}g \cap F = \{0\}$.

Comme $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ on en déduit que $F \oplus G = E$.

f) On cherche une E.D. dont l'équation caractéristique a pour solutions complexes $-1, -1 + i, -1 - i$.

Pour cela il suffit de développer :

$$(r + 1)(r - (-1 + i))(r - (-1 - i)) = (r + 1)(r^2 + 2r + 2) = r^3 + 3r^2 + 4r + 2.$$

Ainsi l'ED. $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 4y' + 2y = 0$ admet $r^3 + 3r^2 + 4r + 2 = 0$ comme E.C. et donc les fonctions $x \mapsto e^{rx}$ comme solutions pour $r = -1$, $r = -1 + i$ et $r = -1 - i$.

Pour $r = -1$, on obtient f_3 .

En prenant Re et Im de $x \mapsto e^{(-1+i)x}$ on obtient que f_1 et f_2 sont solutions de cette E.D.

Comme on a vu que (f_1, f_2, f_3) est libre et que l'énoncé nous dit que l'e.v. des solutions est de dim. 3 on conclut bien que l'e.v. des solutions est exactement E .

Partie II

2.1. a) Par déf. Φ est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$. Montrons qu'un tel morphisme de groupes envoie toujours 0_E sur 0_F .

En partant de l'égalité $0_E + 0_E = 0_E$, comme Φ est un morphisme pour $+$, on a : $\Phi(0_E) + \Phi(0_E) = \Phi(0_E)$ égalité dans le groupe $(F, +)$.

En ajoutant l'opposé de $\Phi(0_E)$, qui existe dans F , aux deux membres de l'équation, on obtient bien $\Phi(0_E) = 0_F$.

b) Sens $\Rightarrow$: si Φ est injective alors chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E par Φ .

Comme on a vu au a) que 0_E était un antécédent de 0_F l'injectivité de Φ dit que c'est le seul.

Sens $\Leftrightarrow$: on suppose donc que 0_E est le seul antécédent de 0_F par Φ .

Soit $(u, v) \in E^2$ tels que $\Phi(u) = \Phi(v)$. Alors $\Phi(u) - \Phi(v) = 0_F$ et comme Φ est linéaire, $\Phi(u - v) = 0_F$.

Donc $u - v$ est antécédent de 0_F par Φ donc $u - v = 0_E$ donc $u = v$.

On vient bien de montrer que Φ est injective.

c) On suppose donc que Φ est injective et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ est une famille libre.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\alpha_1 \Phi(e_1) + \dots + \alpha_n \Phi(e_n) = 0$ (*).

Alors comme Φ est linéaire, (*) devient $\Phi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$.

Comme Φ est injective, on sait alors par le b), que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$.

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on en déduit que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ainsi on a bien montré que $(\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$ est une famille libre de F .

d) Soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une base de E . En particulier c'est une famille et par le c), $(\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$ est une famille libre de F .

Or comme $n = \dim(E)$, et que $\dim(E) = \dim(F)$, on sait que $n = \dim(F)$.

Donc $(\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$ est une famille libre formée de n vecteurs dans l'e.v. F qui est de dim. n , on en déduit que $(\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$ est une base de F .

Montrons que ceci entraîne la surjectivité de Φ :

soit $y \in F$, on sait qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi(e_i)$ puisque $(\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$ est une base de F .

Mais comme Φ est linéaire, on en déduit que $y = \Phi(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \Phi(x)$ où $x \in E$. Donc Φ est bien surjective. $\square$

2.2. a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(f, g) \in \mathbb{K}_n[x]^2$. Montrons que $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g)$.

Or :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g)(x_0), \dots, (\lambda f + \mu g)(x_n)) \text{ par déf. de } \Phi \\ &= (\lambda f(x_0) + \mu g(x_0), \dots, \lambda f(x_n) + \mu g(x_n)) \text{ par déf. des lois dans } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ &= \lambda(f(x_0), \dots, f(x_n)) + \mu(g(x_0), \dots, g(x_n)) \text{ par déf. des lois dans } \mathbb{K}^{n+1} \\ &= \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g) \end{aligned}$$

donc Φ est bien linéaire.

b) Par le 2.1, pour montrer que Φ injective il suffit de montrer que si $\Phi(f) = 0$ alors f est la fonction nulle.

Or si f vérifie $\Phi(f) = 0$ cela signifie que $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$. Comme $f \in \mathbb{K}_n[x]$, la fonction f est alors une fonction polynomiale de degré au plus n qui admet $n+1$ racines, c'est la fonction nulle par théorème sur les zéros des fonctions polynomiales $\square$

c) L'application $\Phi : \mathbb{K}_n[x] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ est une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$ -e.v. de même dimension $n+1$. Comme par b), Φ est *injective*, on déduit du 2.1. d) que Φ est *bijective*.

Cette bijectivité signifie que $\forall (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $\exists ! f \in \mathbb{K}_n[x]$, $\Phi(f) = (y_0, \dots, y_n)$, ce qui est exactement la conclusion demandée. $\square$

2.3. a) Explicitement pour tout $k \in [0, n]$, et tout $x \in \mathbb{K}$, $L_k(x) = \frac{\prod_{i \in [0, n] \setminus \{k\}} (x - x_i)}{\prod_{i \in [0, n] \setminus \{k\}} (x_k - x_i)}$.

Ces formules sont conséquences des conditions $L_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $L_k(x_k) = 1$.

b) Par la formule sur la dérivée d'un produit, avec la déf. de $Q : x \mapsto \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, lorsqu'on dérive Q , on obtient une somme où on dérive successivement chacun des facteurs $x \mapsto (x - x_j)$ dont la dérivée fait à chaque fois 1, donc pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$Q'(x) = \sum_{j=0}^n \prod_{i \in [0, n] \setminus \{j\}} (x - x_i).$$

Lorsqu'on évalue Q' en un x_k tous les termes de cette somme sont nuls sauf le k -ième qui vaut $\prod_{i \in [0, n] \setminus \{k\}} (x_k - x_i)$.

Ainsi $Q'(x_k) = \prod_{i \in [0, n] \setminus \{k\}} (x_k - x_i)$.

En comparant avec la formule du 2.3. a), on obtient donc que $L_k(x) = \frac{\prod_{i \in [0, n] \setminus \{k\}} (x - x_i)}{Q'(x_k)} = \frac{Q(x)}{(x - x_k)Q'(x_k)}$.

2.4 a) Avec les notations du 2.3. et ici $x_k = z_k = \omega^k$, on sait que $Q(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$.

Comme ici $\{z_1, \dots, z_n\} = \mathbb{U}_n$, on sait alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = z^n - 1$ (1).

En outre, en dérivant $\forall z \in \mathbb{C}$, $Q'(z) = nz^{n-1}$ (2).

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C}, f(z) &= \sum_{k=1}^n f(z_k) L_k(z) \quad \text{par 2.3. a),} \\
&= \sum_{k=1}^n f(z_k) \frac{Q(z)}{(z - z_k) Q'(z_k)} \quad \text{par 2.3. b)} \\
&= \sum_{k=1}^n f(z_k) \frac{z^n - 1}{(z - z_k) Q'(z_k)} \quad \text{par l'équation (1) ci-dessus,} \\
&= \sum_{k=1}^n f(z_k) \frac{z^n - 1}{(z - z_k) n z_k^{n-1}} \quad \text{par l'équation (2) ci-dessus} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k f(z_k) \frac{z^n - 1}{z - z_k} \quad \text{car } z_k^n = 1 \text{ donc } \frac{1}{z_k^{n-1}} = z_k.
\end{aligned}$$

b) (i) Avec l'hyp. $\max_{z \in \mathbb{U}} |f(z)| = 1$, on sait que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|f(z_k)| \leq 1$, et $|z_k| = 1$, donc dans l'inégalité du a), avec l'I.T. on obtient si on fixe un $z \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k| |f(z_k)| \frac{|z^n - 1|}{|z - z_k|} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{|z^n - 1|}{|z - z_k|} \quad (\dagger)$$

Or, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $z^n \in D$ et $|z^n - 1| \leq |z^n| + 1 \leq 2$. D'autre part, par I.T.2., pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|z - z_k| \geq |z_k| - |z| = 1 - |z|$ et donc $\frac{1}{|z - z_k|} \leq \frac{1}{1 - |z|}$.

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient : $\frac{|z^n - 1|}{|z - z_k|} \leq \frac{2}{1 - |z|}$, ce qui, dans $(\dagger)$ donne :

$$|f(z)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 - |z|} = \frac{2}{1 - |z|}.$$

(ii) La majoration du (i) s'applique à *tout* polynôme Q tel que $\sup_{|z|=1} |Q| \leq 1$ quel que soit son degré, puisque le majorant ne dépend pas du degré.

Pour un polynôme f fixé vérifiant la condition $\sup_{|z|=1} |f(z)| \leq 1$, on peut donc appliquer le c) à $Q = f^k$ puisque $\sup |f|^k = \sup |f|^k \leq 1$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et tout $z \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$, on aura :

$$|f^k(z)| \leq \frac{2}{1 - |z|}$$

(iii) On peut réécrire l'inégalité du (ii) sous la forme :

$$|f(z)| \leq \left(\frac{2}{1 - |z|} \right)^{1/k}$$

Pour $z \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$ fixé et $k \rightarrow +\infty$, on obtient, en passant à la limite :

$$|f(z)| \leq 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

c) Si $\sup_{|z|=1} |f(z)| = 0$ alors f est le polynôme nul car f a une infinité de racines.

Sinon si on note $\lambda = \sup_{|z|=1} |f(z)|$, alors f/λ vérifie la condition de l'énoncé et si on a la conclusion pour f/λ , on l'aura pour f .

3.1. a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble U_n est borné puisqu'il est inclus dans l'ensemble $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite.

Donc comme U_n est non vide borné, par Propriété de la borne sup. dans $\mathbb{R}$, U_n admet un inf. et un sup. donc $\underline{u}_n = \inf(U_n)$ et $\bar{u}_n = \sup(U_n)$ existent.

b) Pour chaque n , $U_n = \{(-1)^k, k \geq n\} = \{-1, 1\}$, donc $\underline{u}_n = -1$ et $\bar{u}_n = +1$. Donc la suite $\underline{u}$ est constante égale à -1 et la suite $\bar{u}$ est égale à $+1$.

c) Pour chaque n , $U_n = \{(-1)^k + \frac{(-1)^k}{k+1}, k \geq n\}$.

• Si n est pair, on note $n = 2p$, U_{2p} est formé de termes positifs $u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k+1}$ tous inférieurs ou égaux à u_{2p} et de termes négatifs.

Donc $\sup U_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$.

Les termes négatifs dans U_{2p} sont les $-1 - \frac{1}{2k+1}$ où $k \geq p$. Le plus petit de ces termes est $-1 - \frac{1}{2p+1}$ donc $\inf U_{2p} = -1 - \frac{1}{2p+1}$.

- Si n est impair, on note $n = 2p+1$, U_{2p+1} a son plus grand terme positif qui est $u_{2p+2} = 1 + \frac{1}{2p+2}$.

$$\text{Donc } \sup U_{2p+1} = 1 + \frac{1}{2p+2}.$$

$$\text{Comme précédemment } \inf U_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}.$$

On en déduit que les deux suites extraites $(\bar{u}_{2p})$ et $(\bar{u}_{2p+1})$ de u convergent vers 1, alors que les deux mêmes suites extraites de $\underline{u}$ convergent vers -1.

d) Si u est croissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \inf U_n$ et donc $u = \underline{u}$. En revanche pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup U_n = \ell$ la limite de u , donc $\bar{u}$ est une suite constante.

3.2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par déf. on a alors l'inclusion $U_{n+1} \subset U_n$.

Mais alors $\sup U_n$ est un majorant de U_{n+1} donc $\sup U_{n+1} \leq \sup U_n$ puisque $\sup U_{n+1}$ est le plus petit des majorants de U_{n+1} .

Ainsi $\bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n$ et donc $\bar{u}$ est décroissante.

De même, la même inclusion $U_{n+1} \subset U_n$ donne $\inf U_n \leq \inf U_{n+1}$ donc $\underline{u}$ est croissante.

b) On remarque que par déf. de $\bar{u}_n = \sup U_n$ et $\underline{u}_n = \inf U_n$, comme $u_n \in U_n$ on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underline{u}_n \leq u_n \leq \bar{u}_n$$

En particulier pour toute extraction φ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underline{u}_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq \bar{u}_{\varphi(n)}.$$

En passant à la limite dans cette inégalité (comme les suites extraites de $\bar{u}$ et $\underline{u}$ convergent vers la même limite que $\bar{u}$ et $\underline{u}$), on conclut que :

$$\liminf u_n \leq \lambda \leq \limsup u_n,$$

comme demandé, où $\lambda = \lim u_{\varphi(n)}$.

c) Notons $\bar{\ell} = \limsup u$. On veut construire une suite extraite de (u_n) qui converge vers $\bar{\ell}$.

On construit l'appl. φ par récurrence :

On pose $\varphi(0) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: On suppose qu'on a construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ des entiers tels que $|u_{\varphi(k)} - \bar{\ell}| < 1/k$ pour tout $k \leq n$.

On sait que $\bar{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \bar{\ell}$, en décroissant.

Soit $\varepsilon = 1/(n+1)$: on sait qu'il existe un $k_0 > \varphi(n)$ tel que $\bar{u}_{k_0} \in [\bar{\ell}, \bar{\ell} + \frac{1}{n+1}[$ (car ceci est vrai pour tous les k assez grands).

Comme $\bar{u}_{k_0} = \sup\{u_r, r \geq k_0\}$, par déf. du sup., il existe un $r_0 \geq k_0$ tel que $\bar{\ell} - \frac{1}{n+1} < u_{r_0} \leq \bar{u}_{k_0} < \bar{\ell} - \frac{1}{n+1}$.

On pose $\varphi(n+1) = r_0$. On a bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $|u_{\varphi(n+1)} - \bar{\ell}| < 1/(n+1)$.

La récurrence est établie.