

I.P.T. D.S. 2

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.) sont interdits.

Exercice 1 (Divisibilité par 7). On considère le procédé suivant :

Soit $m \in \mathbb{N}$, que l'on suppose écrit en base 10, on enlève à l'écriture décimale de m le chiffre des unités et on le retranche deux fois au nombre ainsi obtenu : le nombre obtenu de la sorte à partir de m sera noté $f(m)$

Voici le procédé itéré sur un exemple :

$$31976 \rightarrow 3197 - 2 \times 6 = 3185 \rightarrow 318 - 2 \times 5 = 308 \rightarrow 30 - 2 \times 8 = 14 \rightarrow 1 - 2 \times 4 = -7.$$

Autrement dit $f(31976) = 3185$, puis $f(3185) = 308$ etc.

- Ecrire une fonction PYTHON qu'on appellera **f** qui prend un entier m (supposé positif) en argument et renvoie l'entier $f(m)$ défini ci-dessus.
- Montrer que si $m \geq 0$ et $f(m) \leq 0$ alors $f(m) \in \llbracket -18, 0 \rrbracket$.
- Montrer que le procédé décrit ci-dessus permet de tester si m est divisible par 7.
- Ecrire un programme PYTHON qui met en oeuvre ce procédé : on écrira une fonction **critere7** qui reçoit **m** en argument et renvoie **True** ou **False**.
- A l'aide de vos arguments du c), justifier la *terminaison* de la fonction **critere7** sur toutes les entrées, et justifier sa *correction* pour notre problème à savoir qu'elle renvoie **True** ssi le nombre m est divisible par 7 (on pourra exhiber un invariant de boucle très simple).

Exercice 2. Une magicienne vous présente les cinq cartes suivantes, que l'on a appelées, par commodité, A,B,C,D,E :

A	1	3	5	7
	9	11	13	15
	17	19	21	23
	25	27	29	31

B	2	3	6	7
	10	11	14	15
	18	19	22	23
	26	27	30	31

C	4	5	6	7
	12	13	14	15
	20	21	22	23
	28	29	30	31

D	8	9	10	11
	12	13	14	15
	24	25	26	27
	28	29	30	31

E	16	17	18	19
	20	21	22	23
	24	25	26	27
	28	29	30	31

- Elle vous demande de choisir un nombre parmi ceux figurés sur les cartes, sans le lui révéler.
- Elle vous demande ensuite de lui montrer toutes les cartes sur lesquelles ce nombre est écrit.
- Elle vous donne alors la valeur de votre nombre secret. Comment fait-elle ?

Exercice 3 (Sur les flottants : variante d'un bébé exemple du cours).

Introduction : considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des nombres *strictement positifs* que l'on peut représenter avec une mantisse mathématique binaire m de longueur 4 et un exposant $j \in \llbracket -2, 1 \rrbracket$, c'est-à-dire de la forme $m \cdot 2^j$.

Pour chaque valeur de j , la mantisse m commençant toujours par un 1, elle est de la forme $m_{[2]} = 1a_2a_1a_0$, donc on a huit nombres possibles pour chaque valeur de j . Comme j prend 4 valeurs, $\mathcal{F}$ contient au total 32 nombres strictement positifs.

Le tableau ci-contre donne la valeur fractionnaire de ces nombres en fonction de la mantisse écrite seulement $a_2a_1a_0$ (le premier 1 étant sous-entendu).

Mantisse	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
000	1/2	1	2	4
001	9/16	9/8	9/4	9/2
010	10/16	10/8	10/4	10/2
011	11/16	11/8	11/4	11/2
100	12/16	12/8	12/4	12/2
101	13/16	13/8	13/4	13/2
110	14/16	14/8	14/4	14/2
111	15/16	15/8	15/4	15/2

Définition de l'approximation $A(x) \in \mathcal{F}$ pour un nombre réel x quelconque :

Pour tout nombre réel $x \in [1/2, 15/2]$, il existe un unique couple (f, f') d'éléments consécutifs de $\mathcal{F}$ tel que $x \in [f, f']$.

- Si x n'est pas le milieu de $[f, f']$, on note $A(x)$ celui des deux nombres f ou f' qui est le plus proche de x . (Par exemple $4.1 \in [4, \frac{9}{2}]$ et $A(4.1) = 4$).
- Si x est au milieu de $[f, f']$, on note $A(x)$ celui des deux éléments f et f' dont le dernier bit de mantisse vaut 0.

Question a) calculer $A(\frac{17}{16})$.

Définition de l'addition machine, noté $\oplus$:

Si f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{F}$, on note $f_1 \oplus f_2 = A(f_1 + f_2)$ (en supposant que $f_1 + f_2 \leq 15/2$, sinon on parle d'overflow).

De même on note $f_1 \ominus f_2 = A(f_1 - f_2)$ (en supposant de même que $f_1 - f_2 > 1/2$).

Question b) calculer $S_1 = (1 \oplus \frac{1}{16}) \ominus \frac{1}{8}$ et $S_2 = (1 \ominus \frac{1}{8}) \oplus \frac{1}{16}$.

Question c) Commentez brièvement le résultat obtenu à la question b).

Exercice 4 (Autour de la division euclidienne).

a) Question de cours : on considère la fonction PYTHON suivante :

```
def diveuclide(a,b):
    """On suppose a et b positifs"""
    r,q=a,0
    while r>=b:
        r=r-b
        q=q+1
    return q,r
```

Démontrer que `diveuclide` termine et renvoie le couple quotient, reste de la division euclidienne de `a` par `b`.

b) Pour $b > 0$ fixé, justifier la complexité de `diveuclide` en fonction de a est un $O(a)$.

c) Ecrire une fonction PYTHON qu'on appellera `ppn` qui prend en argument deux entiers a et b avec $a \geq 0$ et $b > 0$ et qui renvoie le couple n, P où n est le plus petit entier tel que $2^n \cdot b > a$ et $P = 2^n$.

Attention : on impose en outre que la complexité de cette fonction (nombre d'opérations $+$ et $*$) soit un $O(\log(a/b))$, on justifiera cette complexité.

d) On considère la fonction PYTHON suivante :

```
def diveucl2(a,b):
    B,R,Q=b,a,0
    N,P=ppn(a,b)
    Aux=P*B
    while N>0:
        Aux=Aux//2
        N=N-1
        if R<Aux:
            Q=2*Q
        else:
            Q=2*Q+1
            R=R-Aux
    return Q,R
```

i) Décrire les étapes du déroulement de l'algorithme lors de l'appel de `diveucl2(93,7)` (on pourra donner directement le résultat de `ppn`).

ii) Démontrer que pour tout entier $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, `diveucl2` appliquée à a et b renvoie le couple quotient, reste de la division euclidienne de a par b .

e) Pour $b > 0$ fixé, calculer la complexité de `diveucl2` en fonction de a .

Comparer cette complexité à celle trouvée pour `diveuclide`.