

DM 7 : Etude qualitative d'E.D.L. d'ordre deux : solutions

0) a) On peut raisonner par équivalence, on peut aussi être plus prudent et rédiger les deux sens séparément.

Par équivalence :

L'essentiel : ($x_0 \in I$ étant fixé) par théorème, deux fonctions y et z dérivables sur un *intervalle* I sont égales si, et seulement si $\begin{cases} y(x_0) = z(x_0) \\ \text{et } y' = z' \text{ sur } I. \end{cases}$

Soit $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Soit $z : x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x a(t)y(t)dt$. Alors $z(x_0) = y_0 + 0 = y(x_0)$ et par théorème fondamental sur les intégrales : $\forall x \in I, z'(x) = a(x)y(x)$.

Ainsi, par la remarque précédente, y est égale à z si, et seulement si $y(x_0) = y_0$ et $y'(x) = a(x)y(x)$ pour tout $x \in I$ ce qui est l'équivalence demandée.

0 b) Attention ici à ne pas confondre les $\Leftrightarrow$ et les implique $\Rightarrow$.

Soit $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $y(x_0) \leq y_0$ et $\forall x \in I, x \geq x_0 \Rightarrow y'(x) \leq a(x)y(x)$.

En intégrant l'inégalité précédente pour $x \geq x_0$, on a $\int_{x_0}^x y'(t)dt \leq \int_{x_0}^x a(t)y(t)dt$.

Attention à bien mettre du t dans l'intégrale et à intégrer avec $x_0 \leq x$

Donc $y(x) - y(x_0) \leq \int_{x_0}^x a(t)y(t)dt$.

Donc $y(x) \leq y(x_0) + \int_{x_0}^x a(t)y(t)dt$.

Comme en plus on a supposé que $y(x_0) \leq y_0$, on en déduit attention, ce n'est **absolument pas équivalent**)

$$\forall x \geq x_0, y(x) \leq y_0 + \int_{x_0}^x a(t)y(t)dt.$$

1) a) Une inégalité générale sur les inéquation différentielles :

Lemme de Gronwall : Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Montrer que si v et y sont deux fonctions continues avec v positive sur $[a, b]$, vérifiant, pour un $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et tout $x \in I$:

$$y(x) \leq \lambda + \int_a^x v(t)y(t)dt,$$

alors : $\forall x \in I, y(x) \leq \lambda \exp\left(\int_a^x v(t)dt\right)$.

Preuve : On pose (comme indiqué par l'énoncé) $G(x) = \int_a^x v(t)y(t)dt$, de sorte que $G'(x) = v(x)y(x)$ par théorème fondamental.

Alors l'hypothèse s'écrit :

$$y(x) \leq \lambda + G(x) \quad (1)$$

$\forall x \in [a, b] \quad y(x) \leq \lambda + G(x) \Rightarrow v(x)y(x) \leq \lambda v(x) + G(x)v(x), \quad (\text{attention } \mathbf{pas} \Leftrightarrow !)$
(car $v \geq 0$ mais v peut s'annuler)

$$\Leftrightarrow G'(x) \leq \lambda v(x) + G(x)v(x),$$

$$\Leftrightarrow G'(x) - v(x)G(x) \leq \lambda v(x),$$

$$\Leftrightarrow (G'(x) - v(x)G(x))e^{-V(x)} \leq \lambda v(x)e^{-V(x)} \quad \text{en posant } V(x) = \int_a^x v(t)dt,$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} (G(x)e^{-V(x)}) \leq -\lambda \frac{d}{dx} (e^{-V(x)}).$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $x \in [a, b]$, on peut intégrer entre a et $x \geq a$ quelconque, on obtient :

$$\forall x \geq a, \int_a^x \frac{d}{dt} \left(G(t)e^{-V(t)} \right) dt \leq -\lambda \int_a^x \frac{d}{dt} \left(e^{-V(t)} \right) dt,$$

$$\text{i.e. } G(x)e^{-V(x)} - G(a)e^{-V(a)} \leq -\lambda \left(e^{-V(x)} - e^{-V(a)} \right) \quad (\dagger)$$

Or par déf. $G(a) = 0$ et $V(a) = 0$.

Donc $(\dagger) \Leftrightarrow G(x)e^{-V(x)} \leq \lambda - \lambda e^{-V(x)}$. En multipliant par $e^{V(x)}$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \geq a, G(x) + \lambda \leq \lambda e^{V(x)}. \quad (2)}$$

Avec (1) et (2) on obtient bien la conclusion du lemme de Gronwall :

$$\boxed{\forall x \geq a, y(x) \leq \lambda \exp(V(x)).}$$

□

1) b) Pourquoi Gronwall entraîne-t-il une comparaison entre solution et sous-solution d'une E.D. ?

Soit $I = [a, b]$ et v une fonction continue positive sur $[a, b]$. On considère la fonction z solution au problème de Cauchy. $z'(x) = v(x)z(x)$ avec la C.I. $z(a) = \lambda$.

On sait par théorème du cours que $z(x) = \lambda e^{-\int_a^x v(t)dt}$ avec ce même λ .

Si on considère une « sous-solution » y qui vérifie $\forall x \geq a, y'(x) \leq v(x)z(x)$ et $y(x_0) \leq \lambda$.

Alors comme on l'a dit au 0. b) on a $y(x) \leq \lambda + \int_a^x v(t)y(t)dt$.

Donc y vérifie les hypothèses du lemme de Gronwall.

On conclut avec ce lemme que $\forall x \geq a, y(x) \leq \lambda e^{-\int_a^x v(t)dt}$ autrement dit

$$\boxed{\forall x \geq a, y(x) \leq z(x).}$$

Les sous-solutions restent donc (avec l'hyp. cruciale $v \geq 0$) inférieures aux vraies solutions.

2) Un calcul de dérivée d'une intégrale ... avec x dans l'intégrale ...

$$(i) A(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t)a(t)dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)a(t)dt.$$

Comme a est continue, on sait que $x \mapsto \int_a^x \cos(t)a(t)dt$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \cos(x)a(x)$ (de même en remplaçant $\cos$ par $\sin$).

Donc A est dérivable et $A'(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t)a(t)dt + \sin(x) \cos(x)a(x) + \sin(x) \int_0^x \sin(t)a(t)dt - \cos(x) \sin(x)a(x)$.

$$\text{Donc } A'(x) = \int_0^x \cos(x-t)a(t)dt.$$

Remarque : En deuxième année, on peut déduire ce résultat d'un théorème appelé *dérivation sous le signe* $\int$.

(ii) **N.B. utile pour la suite :** L'argument utilisé s'applique aussi à A' .

$$\text{On calcule alors à partir de l'expression } A'(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t)a(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)a(t)dt.$$

$$\text{On obtient } A''(x) = -\sin(x) \int_0^x \cos(t)a(t)dt + \cos^2(x)a(x) + \sin^2(x)a(x) + \cos(x) \int_a^x \sin(t)a(t)dt.$$

$$\text{Donc } A''(x) = \int_a^x \sin(t-x)a(t)dt + a(x).$$

3) Etude d'une perturbation dans le coefficient d'un O.H.

a) Soit $x > 0$. En appliquant le 2) (i) avec $a(t) = \varphi(t)f(t)$, on sait que g est dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$g'(x) = f'(x) + \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)f(t)dt$$

Puis avec le 2) (ii), on calcule :

$$g''(x) = f''(x) - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)f(t)dt + \varphi(x)f(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + f(x)\varphi(x).$$

Comme f est solution de $(\mathcal{H})$, on conclut que $g''(x) + g(x) = 0$.

Remarque : ici l'énoncé a balancé la fonction g mais on voit bien que le terme rajouté ressemble à un terme obtenu par M.V.C.

Une façon plus naturelle de procéder est la suivante :

- on relègue la perturbation dans le second membre, autrement dit on réécrit l'E.D. sous la forme

$$y''(x) + y(x) = -\varphi(x)y(x),$$

- on calcule alors y en fonction de ce second membre par M.V.C.
- on obtient $y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)y(t)dt$ ce qui est équivalent au résultat demandé.

3) b) Par a), il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ en part. g est bornée.

On choisit a un majorant de $|g|$ sur $\mathbb{R}^+$.

Or par déf. de g , on a $\forall x > 0$, $f(x) = g(x) - \int_a^x \sin(x-t)\varphi(t)f(t)dt$.

Donc $|f(x)| \leq |g(x)| + \int_a^x |\sin(x-t)| |\varphi(t)f(t)|dt \leq a + \int_a^x |\varphi(t)f(t)|dt$ □

3) c) L'inég. du 3) b) dit que l'hyp. du théorème de Gronwall du 1) est vérifiée. On conclut donc par 1) b) que pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq a \exp(\int_0^x |\varphi(t)|dt) = a \exp(\tilde{\Phi}(x))$ (**).

Comme $\tilde{\Phi}$ est *croissante* (car sa dérivée $|\varphi|$ est positive sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$) et qu'elle a une limite finie en $+\infty$ elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Donc avec (**), on conclut que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4) L'intégrale première de l'énergie :

a) On a $mx''(t) + kx(t) = 0$ pour tout $t \in I$ intervalle. En multipliant par $x'(t)$, on a $mx'(t)x''(t) + kx'(t)x(t) = 0$ donc $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m(x'(t))^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 \right) = 0$.

Comme on est sur un *intervalle*, on en déduit que la fonction $t \mapsto E(t) = \frac{1}{2}m(x'(t))^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2$ est constante.

b) A partir de $mx''(t) + \lambda x'(t) + kx(t) = 0$, en multipliant par $x'(t)$, on obtient de même $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m(x'(t))^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 \right) = -\lambda x'(t)^2$.

Ainsi si $\lambda < 0$, la fonction E est croissante sur I . Si $\lambda > 0$ la fonction E est décroissante sur I .

5) Application de cette méthode à un cadre plus général :

(M1) On multiplie par y' et en intégrant, on a un terme d'énergie cinétique et un terme plus mystérieux écrit sous forme intégrale. Avec une I.P.P. on arrive par majoration à obtenir une inégalité du type Gronwall pour $y(x)^2$. Voyons en détail.

En multipliant $(\mathcal{H})$ par y' , on a $(\mathcal{H}) \Rightarrow y''y' + q(x)y'y = 0 \Rightarrow \left(\frac{y'^2}{2}\right)' = -q(x)y'y$.

Donc en intégrant : $\frac{y'(x)^2}{2} - \frac{y'(0)^2}{2} = - \int_0^x q(t)y'(t)y(t)dt$ (1).

Pour utiliser la croissance de q (supposée $\mathcal{C}^1$) on fait une I.P.P. dans $\int_0^x q(t)y'(t)y(t)dt$ en posant $\begin{cases} u(t) = q(t) \Rightarrow u'(t) = q'(t), \\ v'(t) = y'(t)y(t) \Leftarrow v(t) = \frac{y(t)^2}{2} \end{cases}$.

Donc $\int_0^x q(t)y'(t)y(t)dt = \left[q(t)\frac{y(t)^2}{2} \right]_0^x - \int_0^x q'(t)\frac{y(t)^2}{2}dt$ (2).

Avec (1) et (2), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, y'(x)^2 - y'(0)^2 = -q(x)y(x)^2 + q(0)y(0)^2 + \int_0^x q'(t)y(t)^2dt \quad (3)$$

Posons $\lambda = y'(0)^2 + q(0)y'(0)^2$, (3) devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, y'(x)^2 + q(x)y(x)^2 = \lambda + \int_0^x q'(t)y(t)^2dt \quad (3')$$

Comme on veut montrer que $y(x)^2$ est majorée, on extrait de (3') l'inéquation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, q(x)y(x)^2 \leq \lambda + \int_0^x q'(t)y(t)^2dt \quad (4).$$

L'inégalité (4) est une inégalité du type Gronwall (cf. 1)) car en posant $Y(x) = q(x)y(x)^2$ et $v(x) = \frac{q'(x)}{q(x)}$ qui sont toutes les deux des fonctions positives, (4) devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, Y(x) \leq \lambda + \int_0^x v(t)Y(t)dt \quad (4').$$

et la conclusion du lemme de Gronwall donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, Y(x) \leq \lambda \exp\left(\int_0^x v(t)dt\right) = \lambda \exp\left(\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)}dt\right) = \lambda \frac{q(x)}{q(0)} \quad (5)$$

L'inégalité (5) se réécrit $\forall x \in \mathbb{R}^+, q(x)y(x)^2 \leq aq(x)$ où $a = \frac{\lambda}{q(0)}$ et comme q est positive st., on en déduit :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, y(x)^2 \leq a$ ce qui donne bien que y est bornée sur $\mathbb{R}^+$, ouf! □

(M2) Avec l'énergie... un peu modifiée.. preuve plus simple due à Laureline.

On pose $E(x) = \frac{1}{2}y'(x)^2 + \frac{1}{2}q(x)y(x)^2$ idée : candidat à être une « énergie » par analogie avec le 4)).

Remarque : Si on calcule $E'(x) = y'(x)y''(x) + q(x)y'(x)y(x) + \frac{1}{2}q'(x)y(x)^2$.

On sait que $(\mathcal{H}) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+, y'(x)y''(x) + q(x)y'(x)y(x) = 0$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, E'(x) = \frac{1}{2}q'(x)y(x)^2. \quad (1)$$

Comme q est croissante, $q' \geq 0$ donc $E' \geq 0$ et E est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Ce n'est pas une très bonne nouvelle pour majorer $|y(x)|$.

Idée : isoler $y(x)^2$ dans $E(x)$ en divisant par q . Il fallait oser diviser par q !

On considère donc plutôt la fonction $\gamma : x \mapsto \frac{E(x)}{q(x)} = \frac{1}{2} \frac{y'(x)^2}{q(x)} + \frac{1}{2} y(x)^2$.

Alors $\frac{d}{dx} \left(\frac{E(x)}{q(x)} \right) = \frac{E'(x)q(x) - E(x)q'(x)}{q(x)^2} = \frac{-q'(x)y'(x)^2}{q(x)^2} \leq 0$ car $q' \leq 0$.

Donc la fonction $\gamma : x \mapsto \frac{E(x)}{q(x)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \gamma(x) \leq \gamma(0)$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{y'(x)^2}{2q(x)} + \frac{y(x)^2}{2} &\leq \gamma(0), \\ \text{donc } \forall x \in \mathbb{R}^+, y(x)^2 &\leq 2\gamma(0) - \frac{y'(x)^2}{q(x)} \\ \text{donc } \forall x \in \mathbb{R}^+, y(x)^2 &\leq 2\gamma(0), \text{ puisque } q > 0, \\ \text{donc } \forall x \in \mathbb{R}^+, |y(x)| &\leq \sqrt{2\gamma(0)}. \end{aligned}$$

Donc $x \mapsto y(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.