

Exercice 6 : (vendredi 26/10) Soit $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$

a) Pour un réel x , $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$, et est positif strictement si et seulement si $x \geq 1$ car $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ et $\ln(1) = 0$.

Et $\ln(\ln(x))$ existe si et seulement si $\ln(x)$ est strictement positif donc si et seulement si $x \in]1, +\infty[$.

Donc l'ensemble de définition de f est $]1, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ et $f''(x) = \frac{-\ln(x)-1}{(x \ln(x))^2}$.

Or, pour $x \in]1, +\infty[$, $\ln(x) + 1 > 0$ et $(x \ln(x))^2 > 0$ donc $f''(x) < 0$.

Donc f est concave.

c) Comme f est concave, on a, pour tous $(x, y) \in]1, +\infty[^2$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$\text{ie } \ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \frac{\ln(\ln(x))+\ln(\ln(y))}{2} = \frac{\ln(\ln(x) \ln(y))}{2} = \ln(\sqrt{\ln(x) \ln(y)}).$$

Or, la réciproque de la fonction $\ln$, qui est la fonction $\exp$, est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc

$$\boxed{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}}.$$

M2 pour montrer la concavité (b)

Montrons que si f est concave, g est concave et g est croissante, alors $g \circ f$ est concave.

Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, où E et F sont des intervalles, et f et g concave, et g croissante.

Soient $(x, y) \in E^2$ quelconque, et soit $t \in [0, 1]$.

Comme f est concave, on a : $tf(x) + (1-t)f(y) \leq f(tx + (1-t)y)$ (1).

Et comme g est concave : $tg(f(x)) + (1-t)g(f(y)) \leq g(tf(x) + (1-t)f(y))$ (2)

(en appliquant l'inégalité de concavité de g à $(f(x), f(y))$).

Comme g est croissante, avec (1) on obtient :

$$g(tf(x) + (1-t)f(y)) \leq g(f(tx + (1-t)y)) \quad (3)$$

Avec (2) et (3), on a : $tg(f(x)) + (1-t)g(f(y)) \leq g(tf(x) + (1-t)f(y)) \leq g(f(tx + (1-t)y))$

$$\text{D'où } \boxed{t(g \circ f(x)) + (1-t)(g \circ f(y)) \leq g \circ f(tx + (1-t)y)}.$$

Donc $\forall (x, y) \in E, \forall t \in [0, 1], t(g \circ f(x)) + (1-t)(g \circ f(y)) \leq g \circ f(tx + (1-t)y)$ ie $g \circ f$ est concave.

La fonction $\ln$ est croissante et concave car pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ et $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Donc avec le résultat ci-dessus, $\ln \circ \ln$ est concave.

Exercice python :

On sait que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$.

Et, comme on note $\arctan$ la réciproque de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

Donc $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$, d'où $\pi = 4 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

On peut donc approximer π en calculant des approximations de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ avec les sommes de Riemann à gauche et à droite.

Programme :

```
def Pi_Riemann_droite(n):
    """ Calcule une approximation de pi """
    #calcule la somme de Riemann a droite qui a n termes
    somme=0
    for i in range(1,n+1):
        somme+=1/(1+((i/n)**2))
    return (4*somme)/n

def Pi_Riemann_gauche(n):
    somme=0
    for i in range(0,n):
        somme+=1/(1+((i/n)**2))
    return (4*somme)/n

>>> Pi_Riemann_droite(10)
3.0399259889071586

>>> Pi_Riemann_gauche(10)
3.2399259889071588

>>> Pi_Riemann_droite(10000000)
3.141592553589987

>>> Pi_Riemann_gauche(10000000)
3.1415927535899875
```