

Exercice 2 pl. 10

a) $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ $f: x \mapsto a \cdot \frac{x^n}{n!}$

f est dérivable k fois sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

et $f^{(k)}(x) = a \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n!} x^{n-k}$, $k \leq n$.

Donc $f^{(k)}(x) = a \cdot \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ pour tout $k \leq n$

2 cas: Si $k < n$, alors $f^{(k)}(0) = a \cdot \frac{0^{n-k}}{(n-k)!} = 0$

Si $k = n$, alors $f^{(k)}(x) = a \cdot \frac{n! x^0}{n!} = a$
Donc $f^{(k)}(0) = a$

De plus, si $k > n$, ~~par convention~~, $f^{(k)}(0) = a \cdot \frac{0}{n!} = 0$

De ce fait, $f^{(k)}(0) = 0$ si $k \neq n$

et $f^{(k)}(0) = a$ si $k = n$

b) g est C^∞ et $g(0) = 1$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(k)}(0) = 0$

f et g sont respectivement D^∞ comme fonction polynôme et fonctions C^∞ .

Donc $(f \cdot g)$ est D^∞ d'th. d'opérations sur les fonctions dérivables.

Donc $(f \cdot g)$ est en particulier dérivable k fois pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Donc, d'après la formule de Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

1^{er} cas: Si $k \neq m$, comme $g^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \neq m$

alors $(f.g)^{(k)}(0) = 0$

2^e cas: si $k = m$, dans ce cas, on a :

$$(f.g)^{(k)} = \binom{k}{k} f^{(k)} g^{(0)} \quad \text{avec } f^{(k)}(0) = a \\ \text{et } g^{(0)} = 1$$

$$\text{Donc } (f.g)^{(k)}(0) = \binom{k}{k} \times a \times 1 \\ = 1 \times a \times 1 = a$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \neq m$, $(f.g)^{(k)}(0) = 0$

Et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k = m$, $(f.g)^{(k)}(0) = a$.