DM 3 : applications, injections, bijections, involutions...

Pour le lundi 15 octobre 2018

Exercice 1 (Bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).

a) Que dire d'une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) \leq n$?

b) Même question en remplaçant le $\leq$ par un $\geq$ dans l'énoncé du a).

c) (Plus difficile) Montrer que si f est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) \neq n$ alors les deux ensembles $\{n \in \mathbb{N},\ f(n) < n\}$ et $\{n \in\ \mathbb{N},\ f(n) \geq n\}$ sont infinis.

Exercice 2 (Fonctions homographiques).

a) Soit $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, où $c \neq 0$ et $D = \mathbb{R} \smallsetminus \{-d/c\}$. Déterminer une CNS sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pour que f soit bijective de D sur $f(D)$.

b) Avec f comme au a), déterminer une CNS sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pour que f soit une involution.

Exercice 3 (Existence de points fixes pour des fonctions continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$).

a) *Archi-standard, à faire absolument :* Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que I est *stable par* f. A l'aide de.la fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - x$ montrer que f admet un point fixe dans I.

b) Variations sur le thème du a) :

(i) Soit $f : \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \circ f$ a un point fixe. Montrer que f a un point fixe.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ décroissante.

Montrer que : $\exists\,!\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Exercice 4 (Inégalité de réordonnement).

1) Préliminaire : Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite *strictement croissante* de nombres entiers naturels. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N},\ a_k \geq k$.

2) L'exercice proprement dit :

Rappel sur les permutations : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *permutation* de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, une *bijection* de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. Soit $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ une telle permutation. Pour un n-uplet $(a_1,\dots,a_n)$ de nombres réels, on peut considérer le n-uplet « permuté par σ : $(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)})$.

Par exemple si $n = 3$ et $\sigma : \left|\begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{array}\right.$, alors le triplet (a_1,a_2,a_3) est permuté par σ en (a_3,a_2,a_1).

Notation : On notera S_n l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1,n]\!]$ (on a dit en cours qu'il y en avait $n!$ mais cela est inutile pour la suite : seul compte le fait qu'il y en a un nombre fini).

a) Réordonnement :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$.

Par chaque permutation $\sigma \in S_n$, on note $N_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} b_i$.

(i) Montrer que N_σ est maximale lorsque $(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ sont rangés dans l'ordre croissant.

(ii) Déterminer à quelle condition N_σ est minimale.

(iii) Adapter les résultats précédents si $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$.

b) Une autre inégalité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n$ une suite d'entiers strictement positifs, deux à deux distincts. Démontrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$