MPSI 1 **Samedi 29 septembre 2018**

Devoir surveillé 1 : solutions

Exercice 1. a) Notons $(1), \dots, (5)$ les propriétés données avec ces numéros dans l'énoncé. Alors :

$$\begin{array}{lll} (1) & \Leftrightarrow & A \quad \text{OU} \quad B, \\ (2) & \Leftrightarrow & C \quad \text{XOR} \quad D, \\ (3) & \Leftrightarrow & E \Rightarrow C, \\ (4) & \Leftrightarrow & A \Leftrightarrow D, \\ (5) & \Leftrightarrow & B \Rightarrow (E \quad \text{ET} \quad A). \end{array}$$

Ainsi :

$$W \Leftrightarrow (A \quad \text{OU} \quad B) \text{ ET } (C \quad \text{XOR} \quad D) \text{ ET } (E \Rightarrow C) \text{ ET } (A \Leftrightarrow D) \text{ ET } (B \Rightarrow (E \quad \text{ET} \quad A))$$

b) **Analyse (Conditions nécessaires pour que W soit vraie) :** on suppose donc que W est vraie.

Alors nécessairement (1) ET (5) est vraie. Comme (1) est vraie, on sait que A est vraie (1er cas) ou B est vraie (2ème cas). Mais si B est vraie par (5) on sait que A est vraie. Donc A est vraie aussi dans le deuxième cas.

Ainsi on vient de montrer que $\boxed{A \text{ est vraie}}$. Avec (4), on en déduit que $\boxed{D \text{ est vraie}}$.

Avec (2), on en déduit $\boxed{C \text{ est fausse}}$.

Avec (3), on en déduit alors que $\boxed{E \text{ est fausse}}$.

On en déduit que $(E \quad \text{ET} \quad A)$ est fausse, et donc par (5), $\boxed{B \text{ est fausse}}$.

Réciproque : Montrons que si A, B, C, D, E ont les valeurs V, F, F, V, F resp. alors W est vraie.

Or (1) est vraie puisque A est vraie, (2) est vraie car C est fausse et D est vraie, (3) est vraie car une implication dont le premier terme est faux est vraie par déf., (4) est vraie car les deux termes sont vrais, (5) est vraie pour la même raison que (3).

Ainsi les cinq propositions $(1) \dots (5)$ sont vraies, ce qui montre bien W est vraie. □

Exercice 2. 2.1.) a) D'après le cours : $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\,\lambda \in \mathbb{R}^+,\ z' = \lambda z, \\ \text{ou } z = 0. \end{cases}$

b) Comme pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta} w| = |w|$, la question posée équivaut à la C.N.S. d'égalité dans l'I.T : $|z + z'| = |z| + |z'|$ avec $z' = e^{i\theta} w$.

1er cas : $z = 0$ ou $w = 0$. Dans ce cas, on a toujours l'égalité demandée, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

2ème cas : $z \neq 0$ et $w \neq 0$. Dans ce cas, par a) l'inégalité équivaut à $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $we^{i\theta} = \lambda z$ autrement dit $\dfrac{we^{i\theta}}{z} \in \mathbb{R}^+ \quad (*)$.

En écrivant $z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha = \text{Arg}(z)$ et $w = r'e^{i\beta}$ avec $r' > 0$ et $\beta = \text{Arg}(w)$, $(*) \Leftrightarrow \dfrac{r'}{r}.e^{i(\beta+\theta-\alpha)} \in \mathbb{R}^+$.

Donc $(*) \Leftrightarrow \beta + \theta - \alpha \equiv 0\,[2\pi]$.

$\boxed{\textbf{Conclusion de ce 2ème cas :} \quad \text{il (faut) et il suffit que } \theta \equiv \alpha - \beta \equiv \text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)\ [2\pi]}$

2.2.) a)

$$\begin{aligned} |z - a| &= |z|.|1 - \frac{a}{z}|, \quad \text{comme } z \neq 0, \\ &= |1 - \frac{a}{z}|, \quad \text{car } |z| = 1, \\ &= |1 - a\overline{z}| \quad \text{encore car } |z| = 1, \text{ entraîne } \overline{z} = 1/z, \\ &= |\,1 - \overline{a}z| \quad \text{en conjugant, ce qui ne change pas le module.} \end{aligned}$$

b) *On met au carré et on développe et ça marche tout seul, à l'exception de la plus astucieuse factorisation finale, qu'on a déjà vue dans un exo. de la planche*

$$\begin{aligned}
|z-a| < |1-\overline{a}z| &\Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2, \text{en gardant l'équivalence car au part d'une inég. de nbres positifs}\\
&\Leftrightarrow (z-a).(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}.z)(1-a\overline{z}),\\
&\Leftrightarrow |z|^2+|a|^2-a\overline{z}-\overline{a}.z < 1-\overline{a}z-a\overline{z}+|a|^2|z|^2,\\
&\Leftrightarrow 1+|a|^2|z|^2-|z|^2-\ |a|^2>0\\
&\Leftrightarrow (1-|a|^2)(1-|z|)>0,
\end{aligned}$$

ce qui est vrai par les hyp. de l'énoncé.

2.3. Soit $S=\cos(\frac{\pi}{7})+\cos(\frac{3\pi}{7})+\cos(\frac{5\pi}{7})$. On sait que $S=\mathrm{Re}(S_{\mathbb{C}})$ où $S_{\mathbb{C}}=e^{i\pi/7}+e^{3i\pi/7}+e^{5i\pi/7}$.

Par somme de termes d'une suite géométrique de raison $e^{2i\pi/7}\neq 1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
S_{\mathbb{C}} &= \frac{e^{i\pi/7}-e^{7i\pi/7}}{1-e^{2i\pi/7}} = \frac{e^{i\pi/7}+1}{1-e^{2i\pi/7}} = \frac{e^{i\pi/7}+1}{(1-e^{i\pi/7})(1+e^{i\pi/7})} = \frac{1}{1-e^{i\pi/7}},\\
&= \frac{1}{e^{i\pi/14}(e^{-i\pi/14}-e^{i\pi/14})} = \frac{1}{-2i\sin(\pi/14)e^{i\pi/14}} = \frac{e^{-i\pi/14}}{-2i\sin(\pi/14)},\\
&= \frac{\cos(\pi/14)-i\sin(\pi/14)}{-2i\sin(\pi/14)} = \frac{1}{2}+\frac{i\cos(\pi/14)}{2\sin(\pi/14)}.
\end{aligned}$$

On conclut bien que $\mathrm{Re}(S_{\mathbb{C}})=1/2$ donc que $\boxed{S=\frac{1}{2}}$.

Exercice 3. a) i) Fait en cours. On considère $2S_1(n)=\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} i$. Dans la deuxième somme on pose $j=(n+1)-i$, et dans la première $j=i$ pour harmoniser les notations.

On obtient $2S_1(n)=\sum_{j=1}^{n} j+\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)=\sum_{j=1}^{n}(n+1+j-i)=\sum_{j=1}^{n}(n+1)=n(n+1)$. D'où $\boxed{S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}.}$

(ii)

```
def S1(n):
    S=0
    for i in range(1,n+1):
        S=S+i
    return S
```

b) (i) Fait en TD de cours avec la somme ligne par ligne comme suit :

$S_2=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(i+j))$. Pour chaque i, on note : $A_i=\sum_{j=1}^{n}(i+j)=\sum_{j=1}^{n} i+\sum_{j=1}^{n} j=in+\sum_{j=1}^{n} j=in+\frac{n(n+1)}{2}$.

Alors $S_2=\sum_{i=1}^{n} A_i=n\sum_{i=1}^{n} i+\frac{n^2(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2}=n^2(n+1)$.

Donc $\boxed{S_2=n^2(n+1)}$.

(ii)

```
def S2(n):
    S=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            S=S+i+j
    return S
```

On suit exactement la méthode du (i) : pour chaque valeur de i (donnée par la boucle extérieure) on calcule la somme $A_i = \sum_{j=1}^{n}(i+j)$ dans la boucle intérieure.

c) En adaptant la technique du b) :

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(i+j+k),\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}(i+j)+\sum_{k=1}^{n}k),\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(n(i+j)+\frac{n(n+1)}{2}),\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n(i+j)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2})\right)\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)+n^2\frac{n(n+1)}{2},\\
&= nS_2+\frac{n^3(n+1)}{2},\\
&= n^3(n+1)+\frac{n^3(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

On conclut donc que $\boxed{S_3 = \frac{3}{2}\cdot n^3(n+1).}$

d) Conjecture : on note $P(p)\ :\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ S_p(n) = \frac{p}{2}\cdot n^p(n+1)$.

Montrons par réc. que $\forall\, p\ \in\mathbb{N}^*,\ P(p)$.

• Initialisation : on a vu au a) (i) que $P(1)$ est vraie. (On a aussi vu que $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies au b) et c)).

• H.R. supposons que $P(p)$ est vraie pour un $p\in\mathbb{N}^*$. Montrons que $P(p+1)$ est vraie. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S_{p+1}(n) &= \sum_{(i_1,\dots,i_p,i_{p+1})\in[\![1,n]\!]^{p+1}}(i_1+\cdots+i_p+i_{p+1}),\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^{p}}\left(\sum_{i_{p+1}=1}^{n}(i_1+\cdots+i_p)+\sum_{i_{p+1}=1}^{n}i_{p+1}\right),\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^{p}}\left(n(i_1+\cdots+i_p)+\frac{n(n+1)}{2}\right),\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^{p}}n(i_1+\cdots+i_p)+\sum_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^{p}}\frac{n(n+1)}{2},\\
&= nS_p(n)+n^p\frac{n(n+1)}{2},\\
&= n\frac{p}{2}\cdot n^p(n+1)+\frac{n^{p+1}(n+1)}{2}\quad\text{par H.R.},\\
&= (\frac{p}{2}+\frac{1}{2})n^{p+1}(n+1)
\end{aligned}$$

ce qui montre bien $S_{p+1}(n) = \frac{p+1}{2}n^{p+1}(n+1)$ et donc $P(p+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ est initialisée pour $n=1$ et héréditaire, donc $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ P(n)}$. □

Exercice 4. a) Les voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^+$ sont les $]-\alpha,\alpha[\cap\mathbb{R}^+$ donc les $[0,\alpha[$ pour $\alpha>0$.

b) f est localement bornée sur I si, et seulement si :

$$\forall\, x \in I,\ \exists\, \alpha > 0,\ \exists\,(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall y \in]x-\alpha, x+\alpha[\ \cap I,\ m \le f(x) \le M.$$

c) Si $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ alors : • f est localement bornée sur $\mathbb{R}$ car pour si on fixe un $x \in\ \mathbb{R}$ et qu'on prend par exemple $\alpha = 1$, alors en prenant $m = x-1$ et $M = x+1$ on a bien $\forall\ y \in [x-1, x+1]$, $x-1 \le f(y) \le x+1$ puisque $f(y) = y$.

Remarque : on verra au B2 que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est localement bornée sur $\mathbb{R}$.

• Montrons que f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ en montrant par exemple que f n'est pas majorée autrement dit en montrant que :

$$\forall\ M \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > M.$$

Or soit $M \in \mathbb{R}$, en prenant $x = M+1$, on a $f(x) = M+1 > M$ ce qui donne la conclusion.

d) Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad \text{si} & x = 0. \end{cases}$

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ entier. Montrons que f n'est pas localement bornée sur $\mathbb{R}$:

Pour $x = 0$, pour tout $\alpha > 0$, $f_{|]-\alpha,+\alpha[}$ n'est pas bornée car pour tout $M > 0$ il existe un $x \in [0, \alpha[$ tel que $1/x > M$ (en prenant par exemple le min de $\alpha/2$ et de $1/M$).

e) Soit $I = [0,1] \cup [2,3]$. Soit $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 \quad \text{si} \quad\ x \in [2,3]. \end{cases}$

La fonction f n'est pas constante sur I car $f(0) \neq f(2)$.

Cependant f est localement constante sur I car pour chaque $x \in I$, en prenant $\alpha = 1/2$, f est constante sur $I\ \cap]x-\alpha, x+\alpha[$ puisque cet ensemble sera toujours inclus soit dans $[0,1]$ soit dans $[2,3]$.

f) **Rappel :** on a dit qu'on pouvait caractériser les intervalles de $\mathbb{R}$ par la prop. suivante

Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi pour tout $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$, on a $[a,b] \subset I$.

C.N. Montrons que si I n'est pas un intervalle alors il existe une fonction $f\ \ :\ I \to \mathbb{R}$, localement constante sur I, non constante sur I. En niant la propriété précédente, on a un couple $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ tel que $[a,b]$ ne soit pas inclus dans I, c'est-à-dire il existe un $x_0 \notin I$ tel que $a < x_0 < b$.

Considérons alors la fonction f qui est constante égale à 0 sur $I \cap]-\infty, x_0[$ et constante égale à 1 sur $]x_0, +\infty[$. La fonction f n'est pas constante car $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$.

La fonction est localement constante car pour tout $x \in I$, si $x \in I \cap]-\infty, x_0[$ on choisit un $\alpha = (x_0 - x)/2$, on a alors un voisinage $]x-\alpha, x+\alpha[\cap I$ de x dans I qui est inclus dans $I \cap]-\infty, x_0[$ et donc sur lequel f est constante. De même dans l'autre cas.

C.S. Si I est un intervalle et si $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ est localement constante alors pour tout $x_0 \in I$, il existe un voisinage $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\cap I$ de x_0 dans I surlequel f est constante. Or une fonction constante est dérivable de dérivée nulle, donc f est dérivable en x_0, de dérivée nulle.

Or par théorème cité en classe une fonction dérivable de dérivée nulle sur un *intervalle* est constante sur cet intervalle.

Donci ici f est constante sur I.