

DM 24 : probabilités

Partie I : polynômes de Bernstein et théorème d'approximation de Weierstrass

L'énoncé suit le sujet du CCMP 2015, le même sujet avait été posé aussi la même année aux CCP de manière un peu plus détaillée

- a) (i) Les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre x , donc S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

D'autre part, par la formule de transfert, comme $M_n(\Omega) = \{\frac{k}{n}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$, on sait que :

$$E(f(M_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(M_n = \frac{k}{n}).$$

Or les événements suivants sont égaux, pour chaque k :

$$\{M_n = \frac{k}{n}\} = \{\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\} = \{S_n = k\}.$$

Donc $E(f(M_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k)$ et comme S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$, on obtient :

$$B_n(f)(x) = E(f(M_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Cas particuliers : (ii) Si $f = 1$.

(M1) En remplaçant f par 1 dans l'expression précédente : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$.

(M2) (Plus probabiliste) Si $f = 1$, $f(M_n)$ est la v.a. constante égale à 1, donc son espérance est aussi égale à 1. Ainsi :

$$B_n(1) = 1 \text{ i.e. la fonction constante égale à 1.}$$

(iii) Si $f = \text{id}$: on va préférer la méthode probabiliste. Ici $B_n(f)(x) = E(M_n) = E(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n} E(S_n)$ par linéarité de l'espérance.

Et encore par linéarité de l'espérance (ou cours sur les v.a. binomiales), on sait que $E(S_n) = nx$, on conclut que $B_n(\text{id}) = \text{id}$.

(iv) Si $f : x \mapsto x^2$. Alors $B_n(f) = E(M_n^2) = E(S_n^2/n^2) = \frac{1}{n^2} E(S_n^2)$.

Le calcul de $E(S_n^2)$ a été fait en cours pour le calcul de la variance d'une v.a. binomiale. Mais mieux encore, le cours sur la covariance montre que si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ avec les X_i mutuellement indép. alors on sait que : $V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$.

Donc on a tout de suite la formule $V(S_n) = nx(1-x)$.

Or $V(S_n) = E(S_n^2) - E(S_n)^2$ ce qui permet de calculer $E(S_n^2) = nx(1-x) + (nx)^2$. Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(f)(x) = (1 - \frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x.$$

- b) **L'idée de la construction de Bernstein :**

approcher la valeur $f(x)$ de la fonction f en un point $x \in [0, 1]$ par la valeur $f(M_n)$ où M_n est une v.a. à valeurs dans $[0, 1]$ dont la distribution se concentre rapidement autour de x quand $n \rightarrow +\infty$. La construction choisie pour M_n est simple, en posant $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, on a bien $E(M_n) = x$ et $V(M_n) = \frac{x(1-x)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (d'où la concentration autour de x).

Pour la C.V.S de $B_n(f)(x)$ vers $f(x)$: pour chaque x , on pense bien sûr à la loi des grands nombres. On a dit que S_n/n convergeait « en probabilité » vers $E(S_n/n) = x$. Avec la continuité de f , et en passant à l'espérance, si « tout se passe bien », on aurait $E(f(M_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E(f(x)) = f(x)$. Bien sûr ceci n'est pas une preuve à ce stade pour nous.

Remarque : le fait que $V(M_n) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$ autrement dit $V(M_n)$ est majorée uniformément par rapport à x par $1/4n$, permet d'espérer aussi la convergence uniforme.

c) Démonstration de la convergence uniforme :

i) Soit $\alpha > 0$. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n , qui est d'espérance x , on sait que :

$$P(|M_n - x| \geq \alpha) \leq \frac{V(M_n)}{\alpha^2} \leq \frac{1}{4n\alpha^2} \quad (*)$$

la dernière inégalité vient de la remarque faite au b) à savoir que. $V(M_n) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$ pour $x \in [0, 1]$ comme le montre l'étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$

Or $\{|M_n - x| \geq \alpha\} = \{|\frac{S_n}{n} - x| \geq \alpha\}$ est l'union disjointe des événements $\{\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\}$ pour tous les k tels que : $|\frac{k}{n} - x| \geq \alpha$.

$$\text{Donc } P(|M_n - x| \geq \alpha) = \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ t.q. } |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha} P(M_n = \frac{k}{n}).$$

$$\text{Or } P(M_n = \frac{k}{n}) = P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

$$\text{Donc } P(|M_n - x| \geq \alpha) = \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ t.q. } |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ ce qui avec } (*) \text{ donne exactement l'inégalité demandée :}$$

$$\sum_{0 \leq k \leq n, |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

$$\text{ii) On a déjà vu que par déf. au a) : } B_n(f)(x) = E(f(M_n)) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (1).$$

$$\text{D'autre part comme } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1, \text{ on peut écrire } f(x) = f(x) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2).$$

En faisant la différence (1) - (2) on a bien :

$$\forall x \in [0, 1], B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (f(\frac{k}{n}) - f(x)).$$

iii) Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est uniformément continue par théorème de Heine. Soit $\alpha > 0$ d'uniforme continuité de f associé à $\varepsilon' = \varepsilon/2$: autrement dit si $|x - y| < \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Soit $x \in [0, 1]$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $|\frac{k}{n} - x| < \alpha$. Alors on sait que $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon'$. Donc en sommant ces inégalités pour tous les k tels que $|\frac{k}{n} - x| < \alpha$ on obtient :

$$\sum_{|\frac{k}{n} - x| < \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq \varepsilon' \sum_{|\frac{k}{n} - x| < \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \varepsilon' = \varepsilon/2. \quad (1)$$

la dernière inégalité étant évidente, due au fait que la somme pour tous les $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ des $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ fait 1.

D'autre part pour tous les k tels que $|\frac{k}{n} - x| \geq \alpha$, en majorant brutalement $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leq |f(\frac{k}{n})| + |f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$, on obtient

$$\sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq 2\|f\|_\infty \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} \quad (2)$$

la dernière inégalité étant fournie par le résultat du (i).

Comme ε et α sont fixés, on peut choisir un n_0 (indépendant de x !) tel que : $\forall n \geq n_0$, $\frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi (2) entraîne :

$$\forall n \geq n_0, \sum_{|\frac{k}{n}-x| \geq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

Avec (1) et (3), on a montré que :

$$\forall n \geq n_0, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon.$$

Compte tenu de la formule du (ii), on a bien :

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \forall x \in [0,1] |f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon}$$

Ceci est la déf. de la convergence uniforme.

Remarques plus générales sur l'approximation uniforme des fonctions continues par des polynômes : La démonstration proposée ici est due à Bernstein en 1913. La démonstration originale de Weierstrass par « convolution » (cf. 2ème année) est aussi très jolie et utile à comprendre, et fait intervenir d'autres polynômes pour approcher f uniformément.

On a vu en T.P. d'info. que l'interpolation de Lagrange équirépartie n'était pas une bonne idée pour arriver à une approximation uniforme.

Pour f lipschitzienne, on a dit en T.P. que l'interpolation de Lagrange aux zéros des polynômes de Tchebychev fonctionne aussi (sans le démontrer toutefois).

En parlant de fonctions lipschitziennes, voici un petit complément sur les polynômes de Bernstein.

Complément au théorème de Bernstein dans le cas lipschitzien On suppose que f est k -lipschitzienne sur $[0,1]$ (notons bien sûr que c'est le cas si f est de classe C^1).

- a) En reprenant les arguments de la preuve précédente, montrer que $\|B_n(f) - f\|_\infty = O(\frac{1}{n^{1/3}})$.
- b) On peut un peu améliorer cette inégalité. En utilisant l'inégalité (si f est k -lip.) :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = E(|f(M_n) - f(x)|) \leq kE(|M_n - x|),$$

montrer que $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{k}{2\sqrt{n}}$.

Remarque sur la vitesse de convergence : ces inégalités ne garantissent qu'une convergence assez lente et en fait elle peut vraiment l'être car on peut montrer que pour $f : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$, on peut *minorer* $\|B_n(f) - f\|_\infty$ par un $a/\sqrt{n}$ avec a constante. Donc l'inégalité ci-dessus est optimale.

Méditation sur le rôle des proba. dans cette preuve : il est possible de rédiger cette preuve sans faire intervenir le langage des probabilités et de n'utiliser que des arguments d'« analyse pure ». C'est d'ailleurs ce que l'on faisait en prépa. avant l'introduction des proba. dans le programme... mais on n'y comprend rien ! Ce sont les *idées, les intuitions et le langage* du monde des probabilités qui ont guidé Bernstein vers cette preuve simple, oui simple car en gros, pour toute la partie de M_n concentrée autour de x , l'uniforme continuité de f fait le travail, et ailleurs l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne une majoration uniforme.

Partie II : marches aléatoires

1) a) Un chemin de n pas s'identifie à un n -uplet dans $\{-1, 1\}^n$. Notre univers pour n pas est dans $\Omega = \{-1, 1\}^n$ de cardinal 2^n .

Quel est le nombre de chemins partant de $(0, 0)$ et arrivant à (n, m) sur la représentation bidimensionnelle des chemins donnée par le sujet ?

Soit α le nombre de pas de montée (les $+1$) et $\beta = n - \alpha$ le nombre de pas de descente pour un chemin de longueur n .

Sur la représentation bidimensionnelle, un chemin partant de $(0, 0)$ arrive à (n, m) si, et seulement si, on a $\alpha - \beta = m$ (avec toujours $\alpha + \beta = n$). Autrement dit ssi $\alpha = \frac{m+n}{2}$ et $\beta = \frac{n-m}{2}$ ce qui n'est possible bien sûr que ssi $m+n$ est pair.

(Si $m+n$ n'est pas pair, il n'y a pas de tels chemin et la proba. correspondante sera nulle.)

Ainsi choisir un chemin de $(0, 0)$ à (n, m) c'est simplement choisir la position des $\alpha = \frac{m+n}{2}$ moments de montée parmi les n pas.

Donc le nombre de chemins cherché est $\binom{n}{\frac{m+n}{2}}$.

La probabilité cherchée est donc $P(S_n = m) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{m+n}{2}}$ si $m+n$ est pair, nulle sinon.

b) Avec la formule précédente, appliquée au cas particulier $m = 0$, on obtient :

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} \text{ si } n \text{ est pair et } P(S_n = 0) = 0 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

2) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_{2k} l'événement : « premier retour à l'origine au temps $2k$ ».

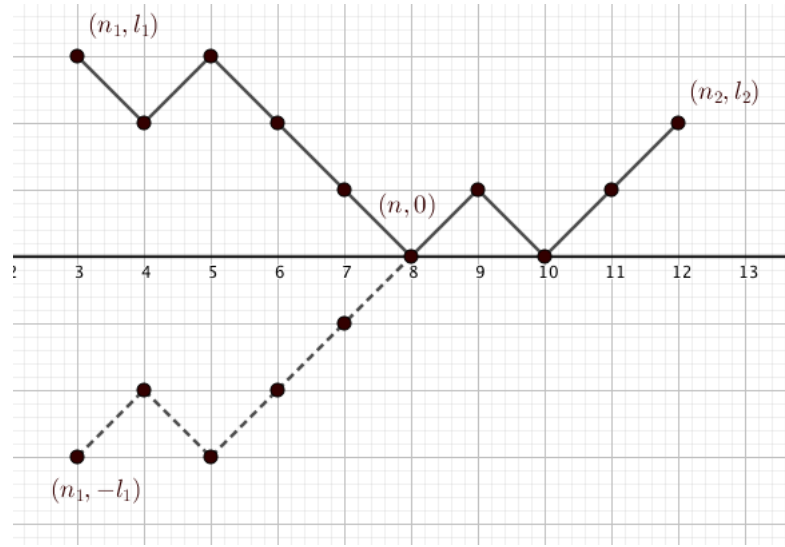
On appelle E l'événement retour à l'origine au temps 2ν . Les événements $(A_{2k})_{k=1, \dots, \nu}$ forment un système complet d'événements dans l'univers E .

Alors d'après la formule des probabilités totales : $P(E) = \sum_{k=1}^{\nu} P(E|A_{2k})P(A_{2k})$ (*). On obtient immédiatement la formule de l'énoncé.

Or $P(E|A_{2k})$ est la probabilité d'aller de l'origine à l'origine en $2(\nu - k)$ pas donc $P(E|A_{2k}) = p_{2(\nu-k)}$. Ainsi la formule (*) donne bien la formule demandée :

$$p_{2\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} \pi_{2k} p_{2(\nu-k)} \text{ en posant (logiquement) } p_0 = 1.$$

b) **Principe de réflexion** : il suffit de considérer l'application qui à un chemin entre (n_1, l_1) et (n_2, l_2) touchant pour la première fois l'axe des abscisses en un certain point $(n, 0)$, associe le chemin entre $(n_1, -l_1)$ et (n_2, l_2) obtenu en prenant le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du chemin entre (n_1, l_1) et $(n, 0)$ puis le même chemin entre $(n, 0)$ et (n_2, l_2) , comme indiqué sur le schéma suivant :



Cette application réalise une bijection entre les deux ensembles de chemins considérés par l'énoncé et donne donc l'égalité des cardinaux.

c) (i) L'événement $\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\}$ décrit tous les chemins qui ne coupent jamais l'axe des abscisses. Il est la réunion disjointe des deux événements $\{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0\}$ et $\{S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2n} < 0\}$.

Ces deux événements sont de même cardinal car la symétrie par rapport à l'axe des abscisse réalise une bijection entre les deux.

D'où l'égalité : $P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = 2P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0)$.

Remarque : bien sûr les événements $S_1 = 0, S_3 = 0$ etc sont impossibles... on pourrait ne garder que les $S_{2i} \neq 0$.

c) (ii) Dans le plan de la figure de l'énoncé, le nombre $N_{n,r}$ de chemins qui satisfont les conditions :

$$S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r,$$

est égal au nombre de chemins qui vont du point $(1, 1)$ au point $(2n, 2r)$ sans toucher l'axe des abscisses.

Ce nombre $N_{n,r}$ est égal au nombre total $T_{n,r}$ de chemin qui vont de $(1, 1)$ à $(2n, 2r)$ diminué du nombre $C_{n,r}$ de tels chemins qui coupent l'axe des abscisse. Par le principe de réflexion du b), $C_{n,r}$ est aussi le nombre total de chemins qui vont de $(1, -1)$ à $(2n, 2r)$.

Or par translation (de vecteur $(1, 1)$) $T_{n,r}$ est égal au nombre total de chemins de $(0, 0)$ à $(2n-1, 2r-1)$ donc (cf a)) $T_{n,r} = 2^{2n-1}P(S_{2n-1} = 2r-1)$

De même par translation de vecteur $(-1, 1)$ $C_{n,r}$ est égal au nombre de chemins qui vont de $(0, 0)$ au point $(2n-1, 2r+1)$ donc $C_{n,r} = 2^{2n-1}P(S_{2n-1} = 2r+1)$. Ces proba. ont été explicitées au a).

Ainsi $N_{n,r} = 2^{2n-1}(P(S_{2n-1} = 2r-1) - P(S_{2n-1} = 2r+1))$.

Donc

$$P(S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r) = \frac{N_{n,r}}{2^{2n}} = \frac{1}{2}(P(S_{2n-1} = 2r-1) - P(S_{2n-1} = 2r+1)),$$

ce qui est le résultat demandé.

c) (iii) Avec le (i), pour montrer $(\dagger)$ il suffit de montrer que

$$P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2}P(S_{2n} = 0),$$

ou encore, en considérant toutes les valeurs possibles de S_{2n} et en appliquant la formule des proba. totales, il suffit de montrer que :

$$\sum_{r=1}^n P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r) = \frac{1}{2}P(S_{2n} = 0) \quad (\dagger).$$

Or avec le (ii) :

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^n P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r) &= \sum_{r=1}^n \frac{1}{2} (P(S_{2n-1} = 2r-1) - P(S_{2n-1} = 2r+1)), \\
&= \frac{1}{2} (P(S_{2n-1} = 1) - P(S_{2n-1} = 2n+1)) \quad \text{par somme télescopique,} \\
&= \frac{1}{2} (P(S_{2n-1} = 1)) \quad \text{car } S_{2n-1} = 2n+1 \text{ est impossible,} \\
&= \frac{1}{2} P(S_{2n} = 0) \quad \text{ce qui montre } (\ddagger) \text{ et donc } (\dagger).
\end{aligned}$$

d) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0) = P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} = 0) + P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} \neq 0),$$

Or d'après la formule $(\dagger)$ du c), $P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0) = P(S_{2n-2} = 0) = p_{2n-2}$ et de même $P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} \neq 0) = p_{2n}$, donc l'égalité précédente s'écrit :

$$p_{2n-2} = \pi_{2n} + p_{2n}.$$

Or on connaît l'expression de p_{2n} depuis le 1) à savoir $p_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ et de même $p_{2n-2} = \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1}$. On obtient donc que :

$$\pi_{2n} = p_{2n-2} - p_{2n} = \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1} - \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad (*)$$

En écrivant $\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}$ et $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{n^2(n-1)!^2}$ et en réduisant au même dénominateur dans $(*)$, on obtient une écriture simplifiée :

$$\pi_{2n} = \frac{4n^2 \cdot (2n-2)! - (2n)(2n-1)(2n-2)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)(2n-2)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

Ainsi, on a montré que :

La proba. de *premier retour* au temps $2n$ vaut : $\pi_{2n} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

Remarque : On note aussi la relation

$$\pi_{2n} = \frac{1}{2n-1} p_{2n},$$

entre la proba. de *premier retour* en 0 au temps $2n$ et la proba. de retour en 0 au temps $2n$.

e) Si on considère une somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^N \pi_{2n}$, avec la formule du d), on obtient une somme télescopique :

$$S_N = \sum_{n=1}^N (p_{2n-2} - p_{2n})$$

avec, pour $n = 1$, $p_{2n-2} = p_0 = 1$.

Donc par la formule sur les sommes télescopique :

$$S_N = 1 - p_{2N}.$$

Or d'après la formule de Stirling (qui est au programme),

$$p_{2N} = \frac{(2N)!}{(N!)^2 2^{2N}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2N}} \frac{\sqrt{2\pi 2N} (2N)^{2N} e^{-2N}}{2\pi N N^{2N} e^{2N}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi N}},$$

Remarque C'est aussi l'équivalent des intégrales de Wallis (qui lui n'est pas au programme mais donne directement un équivalent de $\binom{2n}{n}$ et paradoxalement c'est avec lui qu'on montre Stirling!).

Donc $p_{2N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$.

Ainsi, on a montré que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \pi_{2n} = 1}$$

ce qui s'interprète, les événements « premiers retour à l'origine au temps $2n$ » étant deux à deux incompatibles, en disant que l'ivrogne a probabilité 1 de revenir en 0 si on lui donne un temps aussi long qu'on veut pour cela, mais bien sûr cela nécessiterait de savoir définir un cadre probabiliste correspondant à ce nombre infini de pas.

N.B. 1 On peut montrer mieux : presque sûrement l'ivrogne repassera une infinité de fois en 0.

N.B. 2 Ce qui précède s'appuyait seulement sur du dénombrement. Si on remplace l'hypothèse d'équiprobabilité par une proba. p d'aller à droite et $1 - p$ d'aller à gauche, on raisonne plutôt avec une suite (X_i) de v.a. (dite de Rademacher) valant 1 avec proba. p et -1 avec proba $1 - p$. et $S_{2n} = X_1 + \dots + X_{2n}$.

Dans ce cadre plus général, le calcul de $P(S_n = m)$ n'est guère plus compliqué : toujours si $n + m$ est pair :

$$P(S_n = m) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}},$$

En revanche la suite devient plus compliquée. Le cas envisagé ici s'appelle celui d'une *marche aléatoire symétrique*.