

Chap F2 : Fonctions d'une variable réelle :

Etude locale, développements limités

I Introduction :

1) La motivation essentielle : aller plus loin dans *les manipulations de limites* et dans l'étude *locale* des fonctions faite au B3, avec les équivalents et DL_1 . On a déjà rencontré ce mot *local* : p.ex. quand on dit “ f est bornée au voisinage de x_0 ” (resp. f est croissante, positive etc..) cela signifie “il existe un voisinage de x_0 , que l'on ne connaît pas nécessairement, sur lequel f est bornée” (resp. croissante, positive, etc..)

2) L'idée : approcher localement f par des fonctions polynomiales

a) Cadre de travail : On considère une fonction f définie sur un voisinage d'un point a dans $\mathbb{R}$ (elle peut être définie sur un ensemble plus grand bien sûr mais on ne va s'occuper réellement que de sa restriction à un tel voisinage).

(Eventuellement, on peut aussi considérer des voisinages à droite ou à gauche).

Par commodité pour la suite, on note ce voisinage $V_a =]a - r, a + r[$ et on note $V =]-r, r[$ le voisinage de zéro correspondant en translatant V_a de $-a$

b) Ainsi on utilisera des variables u dans un voisinage de 0 : un élément $x \in V_a$ s'écrit $x = a + u$ avec $u \in V$ voisinage de zéro.

(i) L'idée est que si u est assez petit, on devrait pouvoir “approcher” $f(a + u)$ par une fonction polynomiale de la variable u .

L'exemple le plus simple est l'approximation d'une courbe Γ_f par sa tangente, si f est dérivable en a . A l'aide des dérivées d'ordre supérieur on va trouver des courbes polynomiales de degré plus grand qui “approchent” encore mieux Γ_f au voisinage de a .

(ii) Problème : que veut dire approcher ? Plusieurs sens possibles suivant ce qu'on veut faire :

- si on fait du calcul numérique, on doit avoir des majorations précises de l'erreur d'approximation faite sur des intervalles *connus*. On reviendra sur ce problème au chap. F3.

- Dans ce chapitre, on s'intéresse essentiellement à des problèmes de *limites*, i.e. à des résultats vrais sur “un certain voisinage de a ” dont on ne sait rien à part qu'il existe... Ce qu'on cherche est que la différence entre $f(x)$ et son approximation tende “suffisamment vite” vers zéro.

3) Formulation mathématique :

a) L'approximation “à l'ordre zéro” :

Déf. (connue!) : f est continue en a si, et seulement si, $f(x) - f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

En définissant la fonction $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in V_a, \rho(x - a) := f(x) - f(a)$, on a l'équivalence :

Caract. : f est continue en a ssi on peut écrire :

$$\forall x \in V_a = a + V, f(x) = f(a) + \rho(x - a), \text{ avec } \rho(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0. \quad (1)$$

Ceci se réécrit encore :

$$f \text{ est continue en } a \text{ ssi } f(a + u) = f(a) + o_{u \rightarrow 0}(1) \quad (2).$$

Les écritures (1) ou (2) sont ce qu'on appelle un D.L. à l'ordre 0 de f en a .

N.B. Dans l'écriture (1) l'existence de la fonction ρ ne pose aucun problème : par déf., $\rho(x - a) = f(x) - f(a)$. Ce qui caractérise la continuité est le fait que $\rho(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$.

b) Approximation “à l'ordre un” : (déjà vue au B3)

Dans le cas des fonctions dérivables, on va approcher f au voisinage de a par une fonction affine $x \mapsto \alpha x + \beta$.

Précisément : on a la *prop. fondamentale suivante* des fonctions dérivables :

Prop. Soit $f \in \mathcal{F}(V_a, \mathbb{R})$. Si f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$ alors il existe une fonction $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$, telle :

$$\forall x \in V_a, f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\rho(x - a) \text{ avec } \rho(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \quad (3)$$

N.B. Là encore, la fonction ρ apparaissant dans (3) n'a rien de mystérieux. Pour avoir (3), on doit poser, pour tout $x \neq a$,

$$\rho(x-a) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a),$$

et la dérivabilité de f entraîne donc bien que $\rho(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. On prolonge alors ρ en 0 avec $\rho(0) = 0$.

Rem. L'égalité (3) se note aussi :

$$f(a+u) = f(a) + uf'(a) + u\rho(u) = f(a) + uf'(a) + o_{u \rightarrow 0}(u).$$

Cette écriture s'appelle un DL₁ de f au point a .

c) Idée pour l'approximation "à l'ordre deux" :

(i) si on cherche une approximation plus précise de Γ_f par un morceau de parabole, et si f est deux fois dérivable, on va voir que le meilleur choix est la fonction :

$$p : x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a),$$

qui a la propriété que $p(a) = f(a)$, $p'(a) = f'(a)$, $p''(a) = f''(a)$.

(ii) On va démontrer ci-dessous que si f est deux fois dérivable au voisinage de a , alors on aura :

$$\forall x \in V_a, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + (x-a)^2\rho(x-a), \text{ avec } \rho(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

Ou encore :

$$\forall u \in V, f(a+u) = f(a) + uf'(a) + \frac{u^2}{2}f''(a) + u^2\rho(u).$$

Le terme en $u^2\rho(u)$ se note aussi $o(u^2)$ et pour f deux fois dérivable sur un voisinage de a , on écrira le D.L₂ :

$$f(a+u) = f(a) + uf'(a) + \frac{u^2}{2}f''(a) + o(u^2)$$

II Rappels et compléments sur la négligeabilité et les équivalents

1) Négligeabilité

a) **Déf. donnée au B3**, si g ne s'annule pas sur V_a : $f = o(g)$ en $a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{f}{g} \xrightarrow{a} 0$.

b) **Déf. plus générale** (analogue de ce qui a été vu au E2 pour les suites, on chasse le dénominateur) : pour f et g quelconques définies sur un voisinage de a :

$$\text{Déf. : } f = o_a(g) \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|].$$

Rem. si g ne s'annule pas, on retrouve la déf. du a) en divisant par g .

c) Reformulation équivalente du b) qui explique la notation o :

$$f = o(g) \text{ en } a \text{ ssi il existe un voisinage } V \text{ de } a \text{ et il existe une fonction } \rho : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que :}$$

$$\forall x \in V_a, f(x) = g(x)\rho(x-a) \text{ avec } \rho(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Dém. de cette équivalence : Un sens facile, l'autre demande de construire la fonction ρ .

2) Equivalence

a) Déf. du B3, si f et g ne s'annulent pas : $f \sim_a g \Leftrightarrow f/g \xrightarrow{a} 1$.

b) Nouvelle déf. qui autorise les fonctions à s'annuler :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ ssi il existe un voisinage } V_a \text{ de } a \text{ et une fonction } \alpha : V_a \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que : } \\ \forall x \in V_a, f(x) = \alpha(x)g(x) \text{ avec } \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

Remarque : Avec cette déf., la notation $f \sim_a 0$ a du sens ! Que veut-elle dire ?

Cependant, continuer à éviter absolument les ~ 0 !

d) Reformulation (lien fondamental entre $\sim$ et o) :

$$\begin{aligned} f \underset{a}{\sim} g &\Leftrightarrow f(x) = g(x) + g(x)\rho(x-a) \text{ avec } \rho(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0, \\ &\Leftrightarrow f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x)) \end{aligned}$$

Preuve : Il suffit d'écrire $\alpha(x) = 1 + \rho(x-a)$ dans la déf. du b). On a l'équivalence : $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \Leftrightarrow \rho(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. $\square$

e) Application connue du d) : là où on voudrait faire des "sommes d'équivalents", ou bien "faire passer de l'autre côté" :

les égalités avec $o()$ sont plus souples que les $\sim$

3) Le lemme-clef d'intégration des négligeables

a) **On ne peut pas "dériver" les o et les $\sim$:** $f(x) = o(g(x))$ en a n'entraîne pas $f'(x) = o(g'(x))$ en a .

Ctre-exemple évident avec $x = o(1)$ quand $x \rightarrow 0$, qui n'entraîne pas que $1 = o(0)$!

b) **Lemme-clef : (Intégration des négligeables en un point $a \in \mathbb{R}$)**

(i) **(H)** Soient f et g deux fonctions continues définies sur un voisinage V_a de $a \in \mathbb{R}$ telles que $f(x) = o(g(x))$ en a et g est de signe constant dans V_a (V_a peut être un voisinage d'un côté seulement i.e. de la forme $[a, b]$ ou $[b, a]$).

(C) En notant $F(x) = \int_a^x f$ et $G(x) = \int_a^x g$ les primitives de f et g qui s'annulent en a , on a $F(x) = o_{x \rightarrow a}(G(x))$.

(ii) Preuve du (i) : reportée au d).

c) **Corollaire : lemme d'intégration des équivalents en a .**

(i) **(H)** Soient f et g deux fonctions continues définies sur un voisinage V_a de a telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et g est de signe constant dans V_a .

(C) En notant $F(x) = \int_a^x f$ et $G(x) = \int_a^x g$ les primitives de f et g , qui s'annulent en a , on a $F(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} G(x)$.

(ii) Rem. Comme f et g sont équivalentes, on a dans un voisinage de a , $f(x) = \alpha(x)g(x)$ avec $\alpha(x) \rightarrow 1$, donc f est du même signe que g . L'hyp. est donc faussement dissymétrique entre f et g .

(iii) Preuve du (i) à l'aide du b) :

Via le lien négligeable/équivalent on prouve bcp de résultats sur les $\sim$ à l'aide de résultats sur les $o(\cdot)$.

Soient f et g comme dans l'(H) du (i). On considère $h = f - g$. Par le lien négligeable /équivalent, on sait que $h(x) = o(g(x))$ en a .

Comme g garde un signe constant, on peut appliquer le lemme du b) à h et g , et on conclut que $H(x) = o(G(x))$ en a .

Mais $H(x) = \int_a^x (f(t) - g(t))dt = \int_a^x f(t)dt - \int_a^x g(t)dt$, donc $H(x) = F(x) - G(x)$.

Donc $F(x) - G(x) = o(G(x))$ et encore par le lien $o/\sim$, on a $F(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} G(x)$. $\square$

d) Preuve du lemme-clef du b) :

La force de la formulation avec « $\forall \varepsilon > 0$ » de la prop. $f(x) = o(g(x))$ c'est qu'on sait intégrer une inégalité, alors qu'on ne sait pas "intégrer une limite". Vivent les ε !

III Formule de Taylor-Young et premiers D.L.

1) La formule de Taylor locale dite formule de Taylor Young :

a) Définition des polynômes de Taylor

(i) Soit f une fonction n -fois dérivable en un point a . On note :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

et $T_{n,f,a}$ s'appelle le *polynôme de Taylor à l'ordre n de f en a* .

(ii) Remarque : pour $n = 0, 1, 2$, on retrouve les polynômes du I) 3).

(iii) Propriété : $T_{n,f,a}$ a toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont égales à celles de f .

Autrement dit : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, T_{n,f,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

Preuve : Faite au C3 avec la formule de Taylor sur les polynômes ! $\square$

(iv) Moralement : $T_{n,f,a}(x)$ a vocation à "bien coller" à f au voisinage de a et c'est ce que donne le théorème suivant :

b) Théorème (Taylor-Young) :

(H) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et V_a est un voisinage de a et $f \in \mathcal{D}^n(V_a, \mathbb{R})$
(C) il existe une fonction $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\rho(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et :
 $\forall x \in V_a, f(x) = T_{n,f,a}(x) + (x-a)^n \rho(x-a)$.

c) Exemples avec $a = 0$ et $f = \exp, \cos, \sin$:

(i) Si $f = \exp$, alors comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = f$ et donc $f^{(k)}(0) = 1$, le polynôme de Taylor de $\exp$ en zéro s'écrit $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

Le théorème de T-Y appliqué à $\exp$ pour n qcq dit que :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \rho(x), \text{ avec } \rho(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

(ii) De même pour $\cos$, comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$, le théorème de T-Y appliqué à $\cos$ pour $n = 2p$ par exemple donne :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \rho(x), \text{ avec } \rho(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

(iii) A quoi sert Taylor-Young ?

- On savait comment obtenir un équivalent de $1 - \cos(x)$ via la trigo. : $1 - \cos(x) = 2 \sin^2(x/2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

- Une autre façon d'obtenir cet équivalent est via T-Y à l'ordre deux :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \text{ donc } 1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ i.e. } 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

- Mais là où T-Y va plus loin : si on veut un équivalent de $(1 - \cos(x)) - \frac{x^2}{2}$ en 0.

$$\text{Avec T-Y à l'ordre 4 : on a } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \text{ donc } 1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2} = -\frac{x^4}{24} + o(x^4). \quad \square$$

Ainsi par exemple maintenant on sait calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2}}{(e^x - 1 - x)^2}$.

d) Preuve de T-Y : par récurrence sur n avec le lemme d'intégration des négligeables.

Une prop. clef. des polynômes de Taylor : $T_{n,f',x_0} =$

2) Notion générale de développement limité :

a) Déf. f admet un *développement limité* à l'ordre n en a (abrév. $DL_n(a)$), si et seulement si, il existe un voisinage $V_a = a + V$ de a , où V est un voisinage de zéro, un $(n+1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\rho(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$, tels que :

$$\forall x \in V_a, f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \rho(x-a),$$

ce qu'on écrira plus souvent :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

b) Prop. Si f est $\mathcal{D}^n$ sur un voisinage de a , T.Y. donne l'existence d'un $DL_n(a)$ pour f .

c) Rem. En posant $x = a + u$, la formule du a) s'écrit :

$$\forall u \in V, f(a+u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_nu^n + u^n \rho(u)$$

Autrement dit f admet un DL_n en a ssi $t \mapsto f(a+t)$ admet un DL_n en 0.
On peut donc supposer, pour la théorie, $a = 0$, ce qui est plus commode.

d) Terminologie : Si f admet un $DL_n(a)$, alors le polynôme $x \mapsto a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$ s'appelle la *partie régulière* de ce DL_n de f en a .

Par exemple, pour les fonctions de classe $\mathcal{D}^n$ la partie régulière du DL_n donné par le théorème de T-Y est le *polynôme de Taylor* de f en a .

On peut se poser la question de savoir si f peut admettre "plusieurs" DL_n différents en un même point a ? La réponse est non, comme expliquée dans la prop. suivante, formulée pour $a = 0$, ce qui n'est pas une restriction d'après la rem. du c).

e) Prop. (unicité de la partie régulière) Si on a deux $n+1$ -uplets $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et deux fonctions ρ_1 et ρ_2 définies sur un voisinage V de zéro et tendant vers zéro en zéro, tels que :

$$\forall x \in V, \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n \rho_1(x), \\ f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + x^n \rho_2(x) \end{cases}$$

alors $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ (et donc aussi $\rho_1 = \rho_2$).

Preuve : Soit V un voisinage de zéro comme dans l'énoncé.

On note $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des fonctions h définies sur V telles que $h(x) = o(x^n)$ quand $x \rightarrow 0$.

Le but de la propriété est donc de montrer que si une fonction f s'écrit $f = p + h$ avec $p \in \mathbb{R}_n[x]$ et $h \in \mathcal{N}_n$, alors cette écriture est unique. On aura alors la conclusion sur l'unicité des coeff. par unicité de l'écriture du polynôme p dans la base canonique.

Pour cela, comme $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{N}_n$ sont deux s.e.v., il suffit de montrer que $\mathbb{R}_n[x] \cap \mathcal{N}_n = \{0\}$ (*), car alors ils sont en somme directe.

Or la preuve de (*) est évidente car si $p \in \mathbb{R}_n[x]$ est un polynôme non nul, si on note $a_r x^r$ le monôme de plus bas degré de p , on a $p(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_r x^r$ (avec $a_r \neq 0$) et comme $r \leq n$, $a_r x^r$ n'est pas négligeable devant x^n en 0. □

Remarque : Pour ceux qui aiment cela, on vient de dire aussi que l'ensemble des fonctions définies sur V ayant un DL_n en 0 est : $\mathbb{R}_n[x] \oplus \mathcal{N}_n$.

f) Passage d'un DL_n à un DL_p pour $p \leq n$

(i) Prop. (facile) Si f admet un DL_n en a alors pour tout $p \leq n$, f admet aussi un DL_p en a .

En outre la partie régulière du DL_p de f s'obtient en *tronquant à l'ordre p* la partie régulière du DL_n de f ce qui signifie que (en prenant $a = 0$ pour alléger) si :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \dots + a_nx^n + o(x^n) \quad (1)$$

alors

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p + o(x^p) \quad (2)$$

(ii) *Preuve* – Il s'agit de montrer que (1) $\Rightarrow$ (2).

Or pour n fixé et tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $a_kx^k = o(x^p)$ donc $\sum_{k=p+1}^n a_kx^k = o(x^p)$ et un $o(x^n)$ est un $o(x^p)$ aussi d'où la conclusion. $\square$

(iii) *Exemple* Si f admet le DL_4 suivant en 0, $f(x) = 2 + 4x + x^4 + o(x^4)$ alors le DL_3 de f en 0, sera $f(x) = 2 + 4x + o(x^3)$.

N.B. L'ordre du DL se lit sur ce qu'il y a dans le o et pas sur le terme de plus haut degré du polynôme dans la partie régulière.

g) Effet de la parité

(i) Prop. (facile) Si f est une fonction paire (resp. impaire) sur un voisinage $V =]-r, r[$ de zéro et si f admet un $DL_n(0)$ alors sa partie régulière ne contient que des monômes de degré pair (resp. impair).

(ii) Exemple : pour $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^n)$ si $n = 2p$ ou $n = 2p+1$.

(iii) Preuve du (i) : On suppose f paire. On écrit son $DL_n(0)$:

$$\forall x \in V, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \rho(x) \quad (1).$$

$$\text{Alors on a aussi } f(-x) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + (-1)^n x^n \rho(-x) \quad (2).$$

Comme $\rho(-x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, le dernier terme de (2) est un $o(x^n)$ et donc compte-tenu de $f(-x) = f(x)$, on peut réécrire (2) sous la forme :

$$\forall x \in V, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + o(x^n) \quad (3).$$

Donc (1) et (3) donnent deux $DL_n(0)$ de f . Par unicité de la partie régulière, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (-1)^k a_k = a_k, \text{ donc pour tous les } k \text{ impairs, } a_k = 0.$$

$\square$

3) Exemples de DL de fonctions usuelles, obtenus via T-Y

a) Cas de $(1+x)^\alpha$. b) Symbole binomial généralisé $\binom{\alpha}{k}$.

Retenir le début $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$.

c) Cas particulier de $\frac{1}{1+x}$: (i) calcul des $\binom{-1}{k}$.

(ii) Comment on peut retrouver cette formule avec les suites géométriques.

d) Exemples de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

e) Cas de $\ln(1+x)$ lien avec l'intégration du précédent.

4) Cas des fonctions "non-usuelles" : $\mathcal{C}^n$ ou même $\mathcal{D}^n$ non nécessaire ($n \geq 2$)

(a) Cas $n = 0$: f admet un DL_0 en a ssi f est continue en a .

(b) Cas $n = 1$: f admet un DL_1 en a ssi f est dérivable en a .

(c) Cas $n = 2$.

(i) Révision sur les serpents s_0, s_1, s_2 .

(ii) Un nouveau $s_3 : x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x}) = o(x^2)$ donc admet un DL_2 mais pas $\mathcal{D}^2$ en 0. T.Y. ne s'applique pas.

IV Opérations sur les DL

L'essentiel : pour des fonctions fabriquées à partir de fonctions usuelles par somme, produit, composée, il est exclu en pratique d'obtenir un DL par T.Y. : calcul des dérivées trop lourd !

1) Somme de DL du même ordre n .

a) Prop immédiate : si f et g admettent un DL_n en 0 alors $f + g$ aussi, car $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.

b) Exemple de calcul par somme : D.L. en 0 de ch et sh , à connaître.

2) Produit de DL du même ordre n .

a) Exemple calculer un DL_6 en 0 de $x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$: (seuls les fadas utiliseront Taylor-Young).

b) Prop. si f et g admettent un DL_n en 0 alors le produit fg aussi et la partie régulière du DL_n de fg s'obtient en faisant le produit des parties régulières des DL de f et g , tronqué à l'ordre n .

Règle pratique pour ceux qui veulent être rassurés :

Produit des parties régulières tronqué à l'ordre n , reste d'ordre n

c) Bien sûr ces « règles » ne sont pas vraiment utiles :

l'essentiel est d'avoir compris les produits par des $o()$!

(i) Exemple calculer un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}$.

(ii) Moralité (pour ceux qui aiment les « règles ») mais ne pas apprendre, c'est une remarque : si la partie régulière du DL_n de f est de valuation p , il suffit d'un DL de g d'ordre $n - p$ pour obtenir un DL_n de fg .

(iii) Un exemple où les deux DL n'ont pas de terme constant : calculer un $DL_4(0)$ de $x \mapsto (\ln(1+x))^2$

d) Cas où on divise par un x^p : nécessité d'un DL_{n+p} .

Exemple : calcul d'un DL_2 de $f(x) = \frac{(\ln(1+x))^2 - (\cos x - 1)}{x^2}$.

3) Excursion/motivation : à quoi servent les DL ?

Sur l'exemple précédent : Traduction du DL_2 pour l'étude locale de la fonction : trois informations, attention pour la justification de la position par rapport à la tangente.

Cas plus général : le premier terme significatif après le terme d'ordre 1 donne la position par rapport à la tangente.

4) Intégration des DL : attention au terme constant

a) Cons. du lemme-clef du II 3) : Obtention d'un DL_{n+1} pour une primitive F de f ayant un DL_n , ne pas oublier le terme constant $F(0)$.

b) Application directe aux D.L. des fonctions « à dérivées plus élémentaires » :

$x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ (**formules à retenir**), $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ (ne pas retenir la formule mais si on a allé loin méthode Wallis pour l'expression des coefficients).

c) Application indirecte à $\tan(x)$:

Méthode de réintroduction successive dans $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = 1 + \tan^2(x)$, à bien maîtriser.

Retenir DL₅ de tan.

5) Composition des DL : c'est l'opération la plus subtile

a) Exemple du DL₄ en 0 de $x \mapsto \sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 + u(x)}$.

b) L'essentiel pour composer :

- (i) Les formules ne sont connues qu'en 0. Donc toujours ramener $g(f(x))$ à $h(u(x))$ avec $u \rightarrow 0$. Pour avoir un DL_n de $h(u(x))$:
- (ii) On commence par faire un DL_n de $u(x)$ (l'ordre du DL pour la fonction $x \mapsto u(x)$ à l'intérieur est toujours l'ordre qu'on veut à la fin).
- (iii) Si $u(x) = a_k x^k +$ termes de degré plus grands (avec $a_k \neq 0$) i.e. $u(x) \sim a_k x^k$ alors $o(u^p) = o(x^{kp})$ ce qui détermine l'ordre k du DL de h nécessaire pour obtenir un DL à l'ordre $k.p$ de la composée

c) Exemples : calculer un DL₅ des expressions suivantes en 0

(i) $\sqrt{2 - \sqrt{1 - x^2}}$; (ii) $\sqrt{3 - \sqrt{1 - x^2}}$ (iii) $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

(iv) Les leçons de l'exemple du (iii) :

- la factorisation fait diminuer l'ordre : attention à la valeur absolue de x .
- on n'a pas un vrai DL en 0 (la fonction n'est pas dérivable en 0), mais un DL en 0^+ et en 0^- .
- malgré la parité, DL en 0^+ avec des puissances impaires.

d) Exemple ailleurs qu'en zéro : calculer un DL₂ au point 2π de $x \mapsto \sin(\sqrt{x^2 - 3\pi^2})$.

e) Application :

Tous les DL de quotients f/g avec $g(0) \neq 0$ se calculent par produit du DL de f avec celui de $1/g$, sachant qu'on calcule le DL de $1/g$ en le mettant sous la forme $1/g = \lambda/(1 + u(x))$

Exple : calcul du DL₅ en 0 $\tan(x)$ avec cette méthode (bcp moins efficace que 3) c))!!

f) Cas où on n'est pas au bon point pour composer :

Déterminer un DL₄ en 0 de $f(x) = \text{Arctan}(e^x)$.

(M1) Trouver d'abord une formule pour le DL de Arctan au point 1 : possible mais ceci se ferait en ... et du coup tant qu'à faire : **(M2)**

Moralité :

toujours penser aux dérivées : intégration plus simple que composition.

V Application des opérations sur les D.L. aux opérations sur les fonctions dérivables :

Idée fondamentale : une fonction f est dérivable en un point a ssi elle admet un D.L.₁ en a .

N.B. Les démonstrations ci-dessous, bien que non difficiles, ne sont exigibles que pour les plus avancé(e)s. Pour les autres étudiants, je préfère que l'on se consacre aux techniques concrètes de calcul (avec la composition de DL « concrets »

1) Les théorèmes d'additions et de multiplications des fonctions dérivables (cf. B2) :

Ils ont donc été démontrés (sans le dire!) quand on a montré que si f et g admettent un DL₁ en un point a alors $f + g$ et $f.g$ ont un DL₁ en a .

Pour le produit, on a bien sûr aussi la formule sur la dérivée d'un produit car si :

$f(a + u) = f(a) + uf'(a) + o(u)$ et $g(a + u) = g(a) + ug'(a) + o(u)$ alors :

$$f(a + u)g(a + u) = f(a)g(a) + u(f(a)g'(a) + f'(a)g(a)) + o(u).$$

ce qui montre explicitement que $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$. □

2) Le théorème de composition des fonctions dérivables : Théorème (dérivée d'une composée cf B2) :

(H) $a \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}(a)$, $f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{R})$, f est dérivable en a , $g \in \mathcal{F}(f(V), \mathbb{R})$ et g est dérivable en $b = f(a)$.
 (C) $h = g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$.

Preuve par composition des D.L. : L'hypothèse équivaut à $f(a+u) = f(a) + uf'(a) + o_{u \rightarrow 0}(u)$ et $g(b+v) = g(b) + vg'(b) + o_{v \rightarrow 0}(v)$.

Alors $g(f(a+u)) = g(f(a) + uf'(a) + o(u))$. En posant $v = uf'(a) + o(u)$, par composition des DL, comme $v = O(u)$, on a $g(f(a+u)) = g(b+v) = g(b) + vg'(b) + o(v)$ qui s'écrit encore :

$$g(f(a+u)) = g(b) + (uf'(a) + o(u))g'(b) + o(u) = g(b) + uf'(a)g'(b) + o(u).$$

Ceci est un DL₁ pour $g \circ f$ au point a qui prouve bien la conclusion avec $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(b) = f'(a)g'(f(a))$. $\square$

3) Le théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque : cf B2.

(H) Soit I un intervalle et soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ qui est bijective de I dans J .

(C) Soit $y_0 \in J$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. On a l'équivalence :
 f^{-1} est dérivable en y_0 si, et seulement si, $f'(x_0) \neq 0$.

Et dans ce cas, on a la formule : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Preuve du sens $\Rightarrow$ facile : si f^{-1} est dérivable en y_0 , on peut dériver l'égalité $f^{-1} \circ f = \text{id}$ au point x_0 ce qui donne : $(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$.

On peut appliquer le théorème sur la dérivée d'une composée à au premier membre et on obtient : $f'(x_0) \cdot (f^{-1})'(f(x_0)) = 1$ et donc en particulier $f'(x_0) \neq 0$ et la formule demandée.

Preuve du sens $\Leftarrow$ avec les limites de taux de variations, ici plus simple : on note

$$\tau_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{Pour } y \in J \setminus \{y_0\}, \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\tau_{x_0}(f^{-1}(y))} \quad (1).$$

Or comme f est continue sur I intervalle, f^{-1} est aussi continue, et donc par composition des limites, comme $\tau_{x_0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$ on obtient que $\tau_{x_0}(f^{-1}(y)) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f'(x_0)$ et donc avec (1) :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve du sens $\Leftarrow$ avec les DL, (moins facile mais pour montrer qu'on peut aussi le faire) : Puisque qu'on sait que f^{-1} est continue au point y_0 (cf. théorème sur la continuité d'une application réciproque, car f est continue sur un intervalle I), on peut écrire un DL₀ :

$$f^{-1}(y_0 + u) = f^{-1}(y_0) + \rho(u) = x_0 + \rho(u) \quad \text{où} \quad \rho(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \quad (1).$$

En appliquant f aux deux membres de l'égalité précédente :

$$y_0 + u = f(x_0 + \rho(u)),$$

et comme f admet un DL₁ en x_0 , en remplaçant le second membre par le D.L.₁ de f en x_0 :

$$\begin{aligned} y_0 + u &= f(x_0) + f'(x_0)\rho(u) + o(\rho(u)), \\ &= y_0 + f'(x_0)\rho(u) + o(\rho(u)). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que :

$$u = f'(x_0)\rho(u) + o(\rho(u)) \quad (*)$$

Comme par hyp. $f'(x_0) \neq 0$, la relation $(*)$ dit que $u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \rho(u)$ et par *symétrie* de la relation d'équivalence $\underset{u \rightarrow 0}{\sim}$ on peut écrire $(*)$ dans l'autre sens :

$$f'(x_0)\rho(u) = u + o(u),$$

ou mieux encore :

$$\rho(u) = \frac{u}{f'(x_0)} + o(u) \quad (2)$$

En remplaçant (2) dans (1), on obtient le DL₁ voulu pour f^{-1} en y_0 :

$$f^{-1}(y_0 + u) = f^{-1}(y_0) + \frac{u}{f'(x_0)} + o(u),$$

qui montre bien que f^{-1} est dérivable en y_0 de dérivée $1/f'(x_0)$. □

N.B. Cette seconde preuve est plus longue, mais elle a l'avantage de se généraliser à d'autres contextes. Notamment pour les pb. d'existence d'un DL à un ordre plus grand d'une réciproque, que nous allons étudier au VI.

VI Développement limité d'une fonction réciproque :

Motivation : obtenir des D.L. explicites de fonctions réciproques qu'on ne peut pas expliciter.

1) **Exemple d'exercice :** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - x^2$.

- a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- b) Déterminer un DL₃ de f^{-1} au point 1.

Pour la question b), le plus simple est :

- (i) d'abord de montrer que la fonction réciproque f^{-1} est assez régulière (disons $\mathcal{C}^n$) pour que T.Y. donne l'existence d'un D.L. _{n} de f^{-1} ,
- (ii) et ensuite un calcul malin permet d'expliciter ce DL.

2) **Caractère $\mathcal{D}^n$ resp. $\mathcal{C}^n$ d'une fonction réciproque :**

Comme outil pour le 1) b) (i), on va donner un théorème qu'on prouvera au F3 :

Théorème : Soit $f : I \rightarrow J$ un homéomorphisme de classe $\mathcal{D}^n$ (resp. $\mathcal{C}^n$) avec $n \geq 1$. Alors f^{-1} est de classe $\mathcal{D}^n$ (resp. $\mathcal{C}^n$) sur J si, et seulement si, f' ne s'annule pas sur I .

3) **Retour à l'exercice du 1) b) :**

- (i) On montre ici que f^{-1} est $\mathcal{C}^3$ (en fait $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) et donc T.Y. assure l'existence d'un DL (à tout ordre) de f^{-1} en tout point, en part. en 1 ici.
- (ii) Pour calculer le DL₃ de f^{-1} :

Méthode : par identification dans la formule $f^{-1} \circ f = \text{id}$.

Remarque : Pourquoi faut-il préférer $f^{-1} \circ f = \text{id}$ à $f \circ f^{-1} = \text{id}$?

4) **Remarque $(*)$:** on peut aussi montrer sans hypothèse de régularité sur f (autrement dit sans T.Y. pour f^{-1}) que si f admet un D.L. _{n} en 0 et que $f'(0) \neq 0$ alors f^{-1} admet un D.L. _{n} mais, même si cela peut faire l'objet d'un exercice ce n'est pas un théorème du programme. Les techniques sont proches de la preuve avec DL du théorème sur la dérivée de f^{-1} au V.3.

VII Exemples de développements asymptotiques et généralisés de fonctions

1) **Quand $x \rightarrow +\infty$: on cherche à faire des DL avec la variable $1/x$.**

- a) Exple équivalent simple de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$.
Méthode : factorisation du terme prépondérant.

- b) Si limite infinie : termes en x^n $n \geq 0$ puis termes en $1/x^k$: développement asymptotique.
Exemple de $f(x) = \frac{x^2}{x+1}e^{1/x} = x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$: asymptote et position par rapport à l'asymptote.
c) Cas particulier de $\arctan(x)$: Ex. étude en $\pm\infty$ de $f(x) = (x + 2 - \frac{1}{x}) \operatorname{Arctan}(x)$.
Intérêt de la formule $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \operatorname{sgn}(x)\pi/2$.

2) Exemple de D.A. quand $x \rightarrow 0$

Pour $f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ D.A. en 0 donne position par rapport à l'hyperbole asymptote.

3) Insuffisance de l'échelle des $(x^n)_{(n \in \mathbb{Z})}$: D.L. "généralisés"

- a) Exemple simple de $x \mapsto x \ln(x)$. Famille plus large des $x^\alpha \ln^\beta x$.
b) Exemple : équivalent simple de la différence $\sin(x)^{\sin(x)} - x^x$ en 0.

Appendice : tableau des principaux D.L. à connaître

- $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ (ou mieux $o(x^{2n+1})$).
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ ou mieux $+o(x^{2n+2})$.

Par partie paire et impaire de exp :

- $\operatorname{ch}(x)$ a même D.L. que $\cos(x)$ sans alternance des signes, ou encore, a comme D.L. la partie paire du D.L. de exp.
- $\operatorname{sh}(x)$ a même D.L. que $\sin(x)$ sans alternance des signes, ou encore, a comme D.L. la partie impaire du D.L. de exp.

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$.

Le calcul des $\binom{\alpha}{k}$ se fait de manière successive via $\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha-k}{k+1}$.

- Cas part. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ penser à la suite géom. de raison $-x$.
- En intégrant le précédent : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- En intégrant $\frac{1}{1+x^2}$: $\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1})$ ou mieux $+o(x^{2n+2})$.
- En intégrant $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on a le D.L. de $\operatorname{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$ (ne pas savoir par coeur!). L'expression générale fait intervenir des trucs qui ressemblent à Wallis.

- Par réintroduction succ. dans $\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan^2(x)$, on obtient :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7) \text{ (à connaître jusqu'à l'ordre 5).}$$

Formule de récurrence donnant les coeff. a_n : $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.

- De même $\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$ (bien moins important, mis pour info.).