

Rédactions d'ex. pl. 10.

Exercice 5. On note ici $E(x)$ pour la partie entière d'un réel x . Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = xE(\frac{1}{x})$.

a) Etudier l'ensemble de déf. et la continuité de f sur cet ensemble.

b) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0? Ce prolongement est-il dérivable en 0?

Solution 5 a) (i) f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

(ii) La fonction E est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$.

Par composition, on en déduit que $g : x \mapsto E(1/x)$ est continue sur tous les intervalles de la forme $] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [$ et sur $]1, +\infty[$ et $] -\infty, -1[$ et par produit avec l'application $x \mapsto x$, on déduit que f est continue sur ces mêmes intervalles.

Autrement dit, on sait déjà que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^* \}$.

(iii) Etude en un point $x_0 = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

• Première méthode (conseillée ici) : on va étudier limite à gauche et limite à droite de f .

Pour tout $x \in] \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} [$, on a $\frac{1}{x} \in]n-1, n[$ donc $E(\frac{1}{x}) = n-1$ et donc $f(x) = (n-1)x$. Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ (1).

Pour tout $x \in] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [$, on a $\frac{1}{x} \in]n, n+1[$, donc $E(\frac{1}{x}) = n$ et donc $f(x) = nx$. Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \frac{n}{n} = 1$ (2).

Donc par (1) et (2) on conclut que f n'est pas continue en x_0 .

Conclusion – L'ensemble des points de continuité de f est exactement $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^* \}$.

• Deuxième méthode (un peu lourde, et nous apprend moins sur f).

On commence par montrer que $g : x \mapsto E(1/x)$ n'est pas continue en x_0 . Par l'absurde si g était continue en x_0 alors $E = g \circ \text{inv}$ où $\text{inv} : x \mapsto 1/x$, serait continue en $1/x_0$, i.e. E serait continue en n , ce qui est une *contradiction*.

Donc g n'est pas continue en x_0 .

Comme $f(x) = xg(x)$ on a $g(x) = \frac{1}{x}f(x)$, donc si par l'absurde f était continue en x_0 alors g le serait aussi comme produit de fonctions continues en x_0 , *contradiction*.

b) (i) Par encadrement, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $u-1 < E(u) \leq u$.

Donc pour $u = 1/x$, on a $\frac{1}{x} - 1 < E(1/x) \leq \frac{1}{x}$ (*).

• Pour $x > 0$, on peut multiplier (*) par x et obtenir : $1 - x < f(x) \leq 1$.

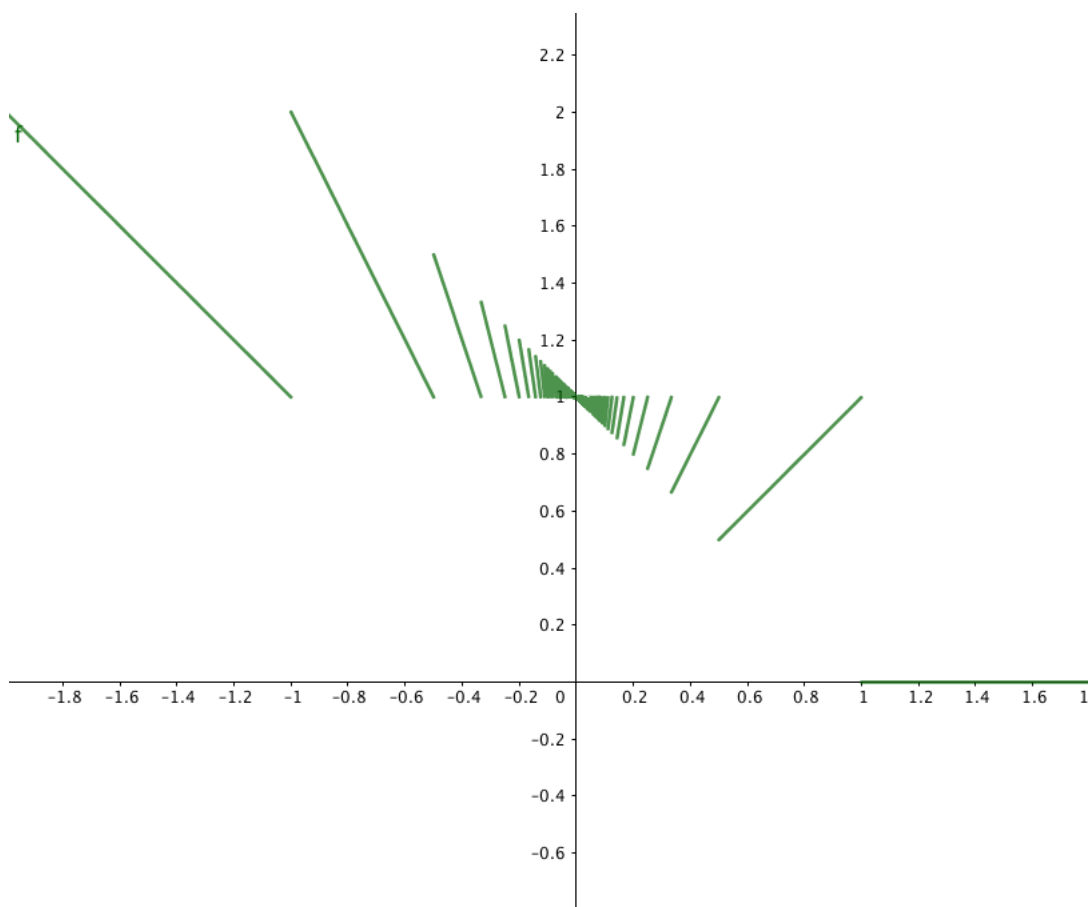
Par théorème des gendarmes, on conclut que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$.

• Pour $x < 0$, la même multiplication donne : $1 - x > f(x) \geq 1$.

Par théorème des gendarmes, on conclut que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1$.

On conclut que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $\widehat{f}(0) = 1$.



(ii) On étudie pour $x \neq 0$, $\Delta(x) = \frac{\widehat{f}(x) - \widehat{f}(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$.

Par l'absurde si Δ a une limite pour $x \rightarrow 0^+$ alors par composition des limites, l'application $u \mapsto E(u) - u$ a une limite quand $u \rightarrow +\infty$.

Or $E(u) - u = -D(u)$ où D est, sur $\mathbb{R}^+$, la fonction "partie décimale" (que je préfère appelée partie fractionnaire.... mais bon je suis l'usage du lycée ici).

La fonction D est périodique de période 1 et non constante donc (ex. pl. précédente, savoir refaire) D n'a pas de limite en $+\infty$. *Contradiction*.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \sqrt{x} - e^{-\sqrt{x}}$.

a) Déterminer l'ensemble $I = f(\mathbb{R}^+)$.

Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}^+$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

c) La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur I ?

d) Calculer $(f^{-1})'(0)$ explicitement.

Solution 6 a) (i) Par théorème généraux d'opérations sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$.

Donc $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{-\sqrt{x}} - 1) < 0$.

(ii) Comme f est continue sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$, dérivable sur l'ouvert $]0, +\infty[$ et $f' > 0$ sur $]0, +\infty[$, on sait que sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$, f est *strictement décroissante*.

Ceci fait vivre les théorèmes du B2, « continue sur I , dérivable sur l'intérieur de I ».

(iii) Comme f est *continue, strictement décroissante*, que $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$, on sait (thème de la bijection) que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 0]$.

Bien mettre en valeurs les 3 hyp. du thm. : continuité, st. monotonie, valeurs aux bornes.

(iv) Ainsi on a montré que $f(I) =]-\infty, 0]$ et que f admet une fonction réciproque, comme demandé par l'énoncé.

b) **(M1) Avec la déf. du nombre dérivée :** *limite des taux de variations*

Ici $t_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - \sqrt{x} - e^{-\sqrt{x}}}{x}$ nous donne une forme indéterminée que nous ne sommes pas encore capable de lever !

Bien sûr, on essaie l'ami $\frac{e^u - 1}{u}$, mais il ne suffit pas ici.

N.B. Après le chapitre sur les développements limités, nous saurons traiter ce calcul de limites.

(M2) Avec le théorème de la limite de la dérivée :

Avec l'expression de $f'(x)$ donnée au a), cette fois comme on sait que $\frac{e^u - 1}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$, ici, par composition des limites avec $u = -\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on obtient que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$.

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1/2$, on sait donc par le théorème sur la limite de la dérivée, on sait que f est dérivable aussi en 0 et que $f'(0) = -1/2$.

Bien citer toutes les hypothèses du théorème de la limite de la dérivée.

c) et d) On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On va appliquer le théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque.

D'après ce théorème f^{-1} est dérivable en un point $x \in f(\mathbb{R}^+)$ ssi $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Ici, f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, donc f^{-1} est dérivable en tout point de $f(\mathbb{R}^+)$.

C'est un cadre fréquent pour appliquer le théorème :
si f' ne s'annule pas sur un ensemble A alors f^{-1} sera dérivable sur tout l'ensemble image $f(A)$.

Le théorème dit alors aussi qu'en tout point $x \in f(\mathbb{R}^+)$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

En particulier pour $x = 0$, comme $f^{-1}(0) = 0$, $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = -2$.