

I.E. SEMAINE 4

DROITE

- 1) Énoncer le théorème sur la dérivée d'une application réciproque.
- 2) Montrer que si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \right)$.

GAUCHE

- 1) Énoncer le théorème de la limite de la dérivée (dit aussi théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$).
- 2) Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{I}, \mathbb{R})$.
Montrer que si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ alors f est croissante sur I .
- 3) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n(f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n}))$. Déterminer la limite de (u_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

Deux exercices où la limite étudiée est un taux de var. et le T.A.F. nous sauve

Solution Droite 3) On pose $g(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \right) = \frac{f(1-x) - f(1+x)}{x}$,

où l'on a noté : $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Sous cette forme $g(x)$ apparaît comme un taux de variations de f entre $1+x$ et $1-x$.

M1 Si on ne voulait pas encore utiliser le résultat général sur la dérivation des $x \mapsto x^\alpha$

On a démontré en cours à l'aide du théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque que $x \mapsto x^{1/3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{3}x^{-2/3}$. Par théorème sur la dérivée d'un quotient, on sait calculer $f'(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{x^{4/3}}$.

M2 Avec le résultat général $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$, ce résultat est immédiat.

Par T.A.F. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(1-x) - f(1+x) = -2xf'(c(x))$, où $c(x)$ est compris entre $(1-x)$ et $(1+x)$ (*).

Donc $g(x) = -2f'(c(x)) = \frac{2}{3} \frac{1}{c(x)^{4/3}}$.

Or $c(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ (par thme des gendarmes vu (*)).

Donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2/3$. □

Solution Gauche 3) Exercice plus abstrait, mais techniquement plus facile, car il n'y a pas de calcul de dérivée à faire !

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par T.A.F. on a un $c_n \in]-1/n, 1/n[$ tel que $f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n}) = f'(c_n) \frac{2}{n}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2f'(c_n)$. Or $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par théorème des gendarmes puisque $c_n \in]-1/n, 1/n[$.

Comme f' est continue en 0, que $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on conclut que $u_n \rightarrow 2f'(0)$. □