

Comment démontrer des inégalités

Exercice 4 (Le cas exemplaire de l'inégalité arithmético-géométrique, à connaître comme du cours.). Montrer pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2$ l'inégalité suivante : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ de trois façons différentes :

- (i) Par calcul algébrique avec une série d'équivalences.
- (ii) En fixant une variable et dérivant par rapport à l'autre.
- (iii) Par concavité du $\ln$.

Solution 4 L'I.A.G. est à connaître comme du cours :

$$\text{Si } 0 \leq a \leq b \text{ (S.R.d.G.) alors } a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

Les trois méthodes proposées pour démontrer l'I.A.G.

Remarque préliminaire : dans toutes les méthodes où on part de la propriété à démontrer pour arriver à quelque chose de vrai, la démonstration n'est valide *que* si on a procédé *rigoureusement* par *équivalence*, *partout*.

• **(M1) La méthode « algébrique » :** manipulations algébriques simples (passage au carré, développement, identités remarquables).

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$. On note (IAG) l'inégalité : $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ à démontrer.

Comme il s'agit d'une inég. entre nombres *positifs* : (IAG) $\Leftrightarrow ab \leq (a+b)^2/4$ (passage au carré).

Donc (IAG) $\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$ ce qui est vrai. Donc (IAG) est vraie. $\square$

Remarque : On peut retenir aussi de cette preuve l'intéressante inégalité :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leq a^2 + b^2$$

• **(M2) La méthode d'analyse par étude de la fonction différence :** (connue au lycée déjà) *pour montrer que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, on étudie les variations $\varphi : x \mapsto g(x) - f(x)$ sur I . On trouve le min. de φ et on montre qu'il est positif.*

S'il y a deux variables : on en fixe l'une et on étudie la fonction p.r. à l'autre variable.

Ici : soit $b > 0$ fixé. Soit $\varphi : a \in \mathbb{R}^{++} \mapsto \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$.

Alors $\forall a > 0, \varphi'(a) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}$. Donc $\varphi'(a) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geq 0 \Leftrightarrow b \leq a$

Donc φ est décroissante sur $]0, b]$ et croissante sur $[b, +\infty[$ et donc admet un min. global en b . On calcule $\varphi(b) = b - b = 0$. Donc $\varphi \geq 0$ sur $]0, +\infty[$ ce qui démontre (IAG). $\square$

• **(M3) En voyant l'I.A.G. comme une inégalité de convexité, ici du $\ln$:**

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2$.

Comme $\ln$ est *strictement croissante*, (IAG) $\Leftrightarrow \ln(\sqrt{ab}) \leq \ln(\frac{a+b}{2})$.

Par prop. algébrique du $\ln$, on a donc : (IAG) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln(\frac{a+b}{2})$, inégalité *vraie* car $\ln$ est concave : c'est le cas $t = 1/2$ dans l'inégalité de la déf. d'une fonction concave. Donc (IAG) est vraie. $\square$

Culturel : sur la moyenne géométrique J'ai dit en cours qu'elle servait à faire la moyenne de croissances « multiplicatives ». Par exemple si le chiffre d'affaire d'une entreprise est multiplié la première année d'un facteur c_1 puis la deuxième année d'un facteur c_2 , alors en moyenne par an, il est multiplié du facteur $\sqrt{c_1 c_2}$.

Généralisation : l'I.A.G. pour n réels positifs : on peut montrer l'inégalité suivante

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

La (M1) n'est vraiment pas facile, même si une récurrence astucieuse permet de le faire. La (M2) peut s'appliquer. La (M3) convenablement généralisée est la bonne méthode, mais il faudrait savoir plus de chose sur la convexité, voir fin de l'année ou deuxième année.

Tous les ex. de la pl. sur les inég. se traitent par une des trois méthodes précédentes.