

Exercice 1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n : x \mapsto e^{-x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$ et $\mu \in]0, 1[$ fixé.

On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $F_n(x) = \mu$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ notée a_n . Etudier la suite (a_n) , équivalent, D.A.

Solution 1 Suite définie implicitement, méthode standard pour montrer que (a_n) est croissante, puis par CVU de F_n sur tout segment que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Pour l'équivalent, méthode probabiliste : soit X_x une v.a. suivant une loi de Poisson de paramètre : $\mathcal{P}(x)$.

Alors $F_n(x) = e^{-x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = P(X_x \leq n)$. Donc a_n est l'unique réel $x \geq 0$ tel que $P(X_x \leq n) = \mu$.

Pourquoi cela aide-t-il ? On va montrer que $a_n \sim n$.

Méthode probabiliste : avec l'I.B.T. (la loi faible des grands nombres n'est pas loin).

Soit $\varepsilon > 0$, on veut mq il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $(1 - \varepsilon)n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)n$.

Par décroissance de F_n , ceci équivaut à montrer que $F_n((1 - \varepsilon)n) \geq \lambda \geq F_n((1 + \varepsilon)n)$.

On donc peut considérer $P(X_{n(1-\varepsilon)} \geq n) = 1 - P(X_{n(1-\varepsilon)} < n) = 1 - P(X_{n(1-\varepsilon)} \leq n - 1) = 1 - F_{n-1}(n(1 - \varepsilon))$.

On remarque que $P(X_{n(1-\varepsilon)} \geq n) = P(X_{n(1-\varepsilon)} - n(1 - \varepsilon) \geq n\varepsilon) \leq P(|X_{n(1-\varepsilon)} - n(1 - \varepsilon)| \geq n\varepsilon)$

Par l'I.B.T., $P(|X_{n(1-\varepsilon)} - n(1 - \varepsilon)| \geq n\varepsilon) \leq \frac{V(X_{n(1-\varepsilon)})}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{n(1 - \varepsilon)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{1 - \varepsilon}{n\varepsilon}$.

Donc $P(X_{n(1-\varepsilon)} \geq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $P(X_{n(1-\varepsilon)} \leq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 > \mu$.

Donc pour $n \geq n_0$, $P(X_{n(1-\varepsilon)} \leq n) > \mu$ et par décroissance de la fonction $F_n : x \mapsto P(X_x \geq n)$, $\forall n \geq n_0$, $a_n \geq n(1 - \varepsilon)$.

De même si on considère $P(X_{n(1+\varepsilon)} \leq n) = P(X_{n(1+\varepsilon)} - n(1 + \varepsilon) \leq -n\varepsilon) \leq P(|X_{n(1+\varepsilon)} - n(1 + \varepsilon)| \geq n\varepsilon)$ encore par l'I.B.T., on obtient que :

$P(X_{n(1+\varepsilon)} \leq n) \leq \frac{n(1 + \varepsilon)}{n^2 \varepsilon^2}$.

On conclut que $P(X_{n(1+\varepsilon)} \leq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < \mu$, donc il existe un n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $a_n \leq (1 + \varepsilon)n$.

Conclusion : on a bien montré que pour tout $n \geq N = \max(n_0, n_1)$, $(1 - \varepsilon)n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)n$, donc $a_n \sim n$.

Méthode avec de l'analyse plus standard.. plus difficile !

Par la formule de Taylor avec R.I., $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$ où $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.

Donc $F_n(x) = 1 + e^{-x} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.

En changeant de variable dans l'intégrale, en posant $t = x - u$ on obtient que : $F_n(x) = e^{-x} \int_0^x \frac{u^n}{n!} e^{x-u} du$
donc :

$$F_n(x) = 1 - \int_0^x \frac{u^n}{n!} e^{-u} du \quad (1)$$

voilà une jolie intégrale.

D'autant que $\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du = 1$, donc on peut réécrire :

$$F_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du \quad (2)$$

Pour montrer que $a_n \sim n$, on va montrer que pour tout $\alpha = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n \geq \alpha n$ (3)

Puis on montrera que pour tout $\beta > 1$ qu'on écrit $\beta = 1 + \varepsilon$ il existe un n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $a_n \leq \beta n$ (4).

Avec (3) et (4) on aura gagné.

• Pour (3) : on va considérer $F_n(n\alpha)$. Par décroissance de F_n , ISMQ $F_n(n\alpha) > \mu$ APCR.

Or avec la formule (1), $F_n(n\alpha) = 1 - \int_0^{n\alpha} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du$.

Or la fonction $g : u \mapsto e^{-u} \frac{u^n}{n!}$ est croissante sur $[0, n]$, décroissante sur $[n, +\infty[$.

C'est l'idée de la bosse de g au point n qui donne l'idée de l'équivalent $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et cela quelque soit λ car comme on va le voir les contributions des intégrales sur $[0, \alpha n]$ et $[\beta n, +\infty[$ compte pour du beurre dans l'intégrale finale quand $n \rightarrow +\infty$.

Elle admet une bosse au point n , mais ici pour $F_n(n\alpha)$, on intègre sur $[0, n\alpha] \subset [0, n]$ intervalle qui s'arrête avant la bosse : g est croissante sur cet intervalle et donc on a la majoration :

$$F_n(n\alpha) \leq n\alpha g(n\alpha).$$

Comme $n\alpha g(n\alpha) = \alpha \frac{n^{n+1} e^{-n\alpha} \alpha^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n e^{-n\alpha+n} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2\pi n}}$ par Stirling, on conclut (comme $\alpha < 1$) que $F_n(n\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 + 0$ ce qui prouve (3).

• Pour (4) : on considère $F_n(n\beta) = \int_{n\beta}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du$. Cette fois, on veut montrer que $F_n(n\beta) < \mu$ APCR.

On est maintenant sur l'intervalle $[n\beta, +\infty[$ après la bosse, on va montrer que l'intégrale tend vers 0.

Bien sûr F_n est décroissante sur cet intervalle, mais on ne peut pas majorer directement ici avec $F_n(n\beta)$ car l'intervalle d'intégration est non borné.

En revanche, en écrivant avec $t = u/n$, $F_n(n\beta) = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{n^n t^n}{n!} e^{-nt} n dt$

comme $u \mapsto e^{-u} u$ est positive décroissante sur $[1, +\infty[$ en écrivant $(e^{-t} t)^n = (e^{-t} t)^{n-1} (te^{-t})$,

on obtient $0 \leq F_n(n\beta) \leq \int_{\beta}^{+\infty} (e^{-\beta} \beta)^{n-1} e^{-t} t \frac{n^n}{n!} dt$, on obtient un majorant qui tend vers 0.

Morale : on a montré que dès qu'on intégrait d'un côté ou de l'autre de la bosse, la contribution était négligeable : la méthode de Laplace n'est pas loin...

Pour aller plus loin avec le théorème central limite :

Théorème admis : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de même loi, admettant une espérance commune μ et une variance commune σ^2 .

$$\text{On note } M_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \text{ et } M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_n \leq x) = \Phi(x)$ où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$.

A l'aide de ce théorème, on peut aller plus loin dans le D.A. de (a_n) : et montrer que $a_n = n + \lambda\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.